info607 : mathématiques pour l'informatique

TD 1 : récurrences

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22
téléphone : 04 79 75 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : aux tours de Hanoi

Question 0 : montrez que la solution donnée en cours est optimale (*i.e.* on ne peut pas résoudre les tours de Hanoi à n disque avec moins de $2^n - 1$ mouvements).

Question 1 : Hanoi généralisé. Peut-on remplacer les positions initiales et finales par des positions quelconques ? Est-ce que le nombre optimal de mouvements $(2^n - 1)$ est toujours valide pour cette variante ?

On considère maintenant la variante suivante : les positions de départ et d'arrivée sont identiques, mais les contraintes sont :

- on ne déplace qu'un disque à la fois
- on ne peut pas poser un disque sur un disque plus petit
- on ne peut pas faire de mouvement direct de A vers C (il faut le décomposer en $A \to B$ puis $B \to C$)

Question 2 : résolvez le problème pour 1 et 2 disques. Combien de mouvements utilisez-vous ? Même question pour 3 disques...

Question 3 : donnez une relation de récurrence pour calculer le nombre de mouvements que vous faites ; montrez que ce nombre est optimal.

Question 4 : combien de mouvements utiliseriez-vous pour 4, 5 ou 6 disques ?

Question 5 : résolvez cette récurrence.

Question 6 : montrez que lors de la résolution de cette variante avec n disques, toutes les configurations valides (empilements de n disques sur trois emplacements) sont rencontrées.

Question 7 : on revient maintenant à la règle originale, mais où chaque disque est dédoublé (on a donc $2n$ disques). Combien de mouvements faut-il pour transférer cette double tour de A vers C. (Les disques identiques peuvent être interchangés, et on peut les mettre les un sur les autres...)
Si vous trouvez que c'est trop facile, cherchez le nombre de mouvements optimal si on demande que l'ordre des disques à l'arrivée soit le même que au départ...

Question 8 : on considère maintenant la variante de Hanoi avec un emplacement suplémentaire. Essayer de résoudre le problème pour 1, 2, 3, 4, 5 disques. Pouvez-vous trouver une relation de récurrence ?

Exercice 2 : une récurrence intéressante

Soit la récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ u_{n+2} = (1 + u_{n+1})/u_n \end{cases}$$

avec α et β deux nombres strictements positifs

Question 1 : résolvez cette récurrence pour $\alpha = \beta = 1$.

Question 2 : même question pour $\alpha = \beta = 2$.

Question 3 : dans le cas général, montrez que $u_4 = (1+\alpha)/\beta$; déduisez en une formule générale pour u_n.

Exercice 3 : un problème géométrique (long)

Question 1 : quel est le nombre maximal de régions du plan délimitées par n droites. (On compte également les régions infinies...)

Question 2 : même question si on ne compte pas les régions infinies.