info607 : mathématiques pour l'informatique

TD 2 : approximations asymptotiques, fonction "partie entière"

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22
téléphone : 04 79 75 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : approximations asymptotiques

On rappelle les définitions du cours :
- $f(n) = O(g(n))$ si $\exists C\ \exists n_0$ t.q. $\forall n > n_0\ |f(n)| < C|g(n)|$
- $f(n) = \Omega(g(n))$ si $g(n) = O(f(n))$
- $f(n) = \Theta(g(n))$ si $f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$

Question 1 : donnez la définition de $f(n) = \Omega(g(n))$ avec des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Idem pour $f(n) = \Theta(g(n))$.
Montrez que si $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n))$ alors $f(n) = O(h(n))$.

Question 2 : comme dans le cours, on note $f(n) \prec g(n)$ pour $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$. On a la hiérarchie suivante

$$1 \prec \log(\log(n)) \prec n^\varepsilon \prec n \prec n^c \prec n^{\log(n)} \prec c^n \prec n^n \prec c^{(c^n)}$$

(où ε et c sont des constantes arbitraires avec $0 < \varepsilon < 1 < c$)
Où positionnez-vous les fonctions $\log(n)$, $\ln(n)$ et $n\log(n)$?

Question 3 : la formule de Stirling est incroyable :

$$n! \quad = \quad \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n + O(1/n)$$

En utilisant cette formule, donnez une approximation de $\ln(1)+\ln(2)+\cdots+\ln(n) = \sum_{i=1}^n \ln(i)$ lorsque $n \to \infty$.

Question 4 : remplissez le tableau suivant. Caque case doit contenir la taille (n) du plus grand problème que l'on peut résoudre si le temps de calcul est $f(n)$ (en microsecondes) et si on est prêt à attendre le temps indiqué.

$f(n)$ \ temps	1 sec	1 min	1 h	1 jour	1 mois	1 an	1 siècle
$\log_{10}(n)$							
$\sqrt{n}$							
n	10^6	6×10^7	$3{,}6\times10^9$	$8{,}64\times10^{10}$	$2{,}59\times10^{12}$	$3{,}15\times10^{13}$	$3{,}15\times10^{15}$
$n\log_2(n)$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							
n^n							

Exercice 2 : fonctions partie entière inférieure / partie entière supérieure

Les définitions de $\lfloor x \rfloor$ (partie entière inférieure) et $\lceil x \rceil$ (partie entière supérieure) sont les suivantes : si x est un réel,

- $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x
- $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x

Question 1 : Vrai ou Faux ? Donnez une preuve ou un contre-exemple. (dans la suite, x et y sont des réels arbitraires et n est un entier arbitraire)

a- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 \leq x < n$
b- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n-1 < x \leq n$
c- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$
d- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n-1 \leq x < n$
e- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \leq n < x+1$
f- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x-1 < n \leq x$

g- $x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$
h- $x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$
i- $x > n \Leftrightarrow \lceil x \rceil > n$
j- $x \geq n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq n$

k- $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$
l- $\lfloor n/3 \rfloor + \lfloor (n+1)/2 \rfloor + \lfloor (n+2)/3 \rfloor = n$
m- $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
n- $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$
o- $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$

Question 2 : montrez que pour tout réel x, on a

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \quad = \quad \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

Question 3 : on a $\left\lfloor \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rfloor \geq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur x pour avoir l'égalité.

Question 4 : démontrez la proposition suivante

> **Proposition.** *Si f est une fonction continue strictement croissante vérifiant "$f(x)$ est un entier implique x est un entier", alors on a $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$.*

Pour les rapides, même question en remplaçant $\lfloor \_ \rfloor$ par $\lceil \_ \rceil$.
Que se passe-t'il si f est strictement décroissante ?

Question 5 : quel est le nombre de bit dans l'écriture d'un entier n en base 2 ?

Question 6 : donnez, en utilisant les fonctions partie entière, le nombre d'entiers dans les intervalles $[x,y[$, $]x,y]$, $[x,y]$ et $]x,y[$. (x et y sont des réels arbitraires avec $x < y$.)

Question 7 : montrez que

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \quad = \quad \left\lceil \frac{n+m-1}{m} \right\rceil$$