info607 : mathématiques pour l'informatique

TD 3 : un peu d'arithmétique

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22
téléphone : 04 79 75 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : définitions du cours

Question 1 :
- expliquez pourquoi $0 \setminus n$
- est-ce que $0 \setminus 0$?
- quels sont les multiples de -1 ?
- pourquoi est-ce que $\text{pgcd}(0,0)$ est indéfini

Question 2 : appliquez l'algorithme d'Euclide pour calculer
- $\text{pgcd}(22,75)$
- $\text{pgcd}(27,51)$

Question 3 : appliquez l'algorithme d'Euclide étendu (la variante "à la main") pour calculer les nombres de Bezout associés à
- $\text{pgcd}(5,9)$
- $\text{pgcd}(8,38)$
- $\text{pgcd}(6,21)$

Question 4 :
- on a $1 = 3 \times 7 - 4 \times 5$, que pouvez-vous déduire sur 3, 7, 4 et 5 ?
- on a $4 = 6 \times 9 - 5 \times 10$, que pouvez-vous déduire sur 6, 9, 5 et 10 ?

Question 5 : les nombres 537138 et 412923 ont les représentations suivante comme produits de facteurs premiers :

$$537138 = 2 \times 3^2 \times 7^3 \times 29 \quad \text{et} \quad 412923 = 3 \times 7^2 \times 53$$

Quel est leur pgcd ?

Exercice 2 : calcul modulo

Question 1 : les équations suivantes ont-elles des solutions ? Si oui, donnez l'ensemble des solutions...
- $3x \equiv 5 \pmod 7$
- $2x - 3 \equiv 0 \pmod 4$
- $5x + 2 \equiv 0 \pmod 6$

Question 2 : montrez que $(3^{77} - 1)/2$ est un nombre impair. Montrez que ce même nombre est divisible par $(3^7 - 1)/2$ pour conclure qu'il n'est pas premier.
Montrez que si k n'est pas premier, alors $2^k - 1$ (nombre de Mersenne) n'est pas premier non plus.

Question 3 : quand est-ce que $2^n - 1$ est un multiple de 3 ?

Question 4 : "pour savoir si un nombre est divisible par 9, il suffit de vérifier si la somme de ces chiffres est divisible par 9".
Expliquer pourquoi cette règle par 9 fonctionne.

Exercice 3 : les frises...

Question 1 : en partant d'une ligne de 0 et d'un zigzag de 0 sur la gauche et une dernière ligne de 0 (voir plus bas), remplissez le tableau de manière à avoir $b+c = a+d+1$ pour tout losange de la forme

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

Que constatez-vous ?

Question 2 : on remplace maintenant les 0 par des 1 et la condition devient $bc = ad + 1$. Que constatez-vous ?

Question 3 : nous allons juste voir pourquoi la première ligne est répétée (décalée) sur la dernière ligne. Montrez que la relation

$$\frac{a+e}{c} = \frac{b+f}{d}$$

est vrai pour chaque partie

$$\begin{array}{cccc} & a & & \\ b & & c & \\ & d & & e \\ & & f & \end{array}$$

de la frise.

Question 4 : en utilisant la question précédente, montrez que toutes les cases sont bien des nombres entiers.

Question 5 : en utilisant la question 3, montrez que les premières et dernières lignes sont identiques modulo un décalage.

Même qestion pour la deuxième ligne...

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 1 2 ? ? ? ? ? ? ? ?
  0 1 ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
  0 ? ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
0 ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 0 1 3 ? ? ? ? ? ? ? ? ?
0 1 2 ? ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 1 ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
  0 1 ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 1 ? ? ? ? ? ? ? ? ?
  0 1 ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?
 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

deux débuts de frise