info204 : Science informatique
TD 1 : la base 2

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`
wiki : `http://www.lama.univ-savoie.fr/wiki`

Exercice 1 : Application du cours

Question 1. Donnez la représentation en base 2 des nombres suivants :

$$12, \qquad 24, \qquad 48, \qquad 21, \qquad 37, \qquad 142, \qquad 1000.$$

Question 2. Donnez la valeur (représentation en base 10) des nombres suivants :

$$\underline{1101010}_2, \qquad \underline{110101}_2, \qquad \underline{11010}_2, \qquad \underline{1010101}_2, \qquad \underline{1111111111}_2, \qquad \underline{1011101001010}_2$$

Question 3. Pour chacun des nombres de la question précédente, donnez la représentation en hexadécimal (base 16).

Question 4. Quand on veut trouver la représentation en base 2 d'un nombre écrit en base 10, est-il plus simple de commencer par chercher les bits de poids forts, ou ceux de poids faible.

Décrivez un algorithme (méthode formalisée, programmable) pour effectuer cette transformation.

Question 5. Faites les calculs suivants, en détaillant :
- $\underline{110101001}_2 + \underline{1111}_2$,
- $\underline{1111111}_2 + \underline{101010}_2$,
- $\underline{110101001}_2 \times \underline{1010}_2$,
- $\underline{1101}_2 \times \underline{100010001}_2$,
- $\underline{11111}_2 \times \underline{11111}_2$.

Question 6. Comparez les nombres suivants sans l'aide d'un ordinateur :
- 2^{50} et 10^{20},
- 2^{512} et 10^{100}.

Exercice 2 : un peu plus loin

Question 1. Quelle est la valeur de $\underline{10101\dots101}_2$?

Question 2. Cherchez une formule pour trouver la valeur de $11\dots11 \times 11\dots11$.

Question 3. Écrivez 42 en base 3.

Question 4. À quoi correspond le nombre $\underline{1436}_7$?

Question 5. Est-il facile de traduire un nombre écrit en base 17 en base 15 ?

Exercice 3 : le code de Gray

Si on énumère tous les entiers écrits en base 2 sur 3 bits dans l'ordre, on obtient :

$$\underline{000}_2,\quad \underline{001}_2,\quad \underline{010}_2,\quad \underline{011}_2,\quad \underline{100}_2,\quad \underline{101}_2,\quad \underline{110}_2,\quad \underline{111}_2.$$

Un *code de Gray sur 3 bits* est une énumération des entiers écrits en base 2 sur 3 bits avec la propriété suivante :

un seul bit est modifié quand on passe d'un entier au suivant.

Question 1. Trouvez un code de Gray sur 3 bits.

La solution est-elle unique ?

Question 2. Trouvez un code de Gray sur 3 bits où la propriété est également vérifiée entre le premier et le dernier entier.

Question 3. On peut générer un code de Gray $\Gamma(n)$ sur n bits de la manière suivante :

- $\Gamma(0) = \_$ (vide),
- $\Gamma(n+1) = \underline{0} \cdot \Gamma(n), \underline{1} \cdot \overline{\Gamma(n)}$.

Ici, le "$\cdot$" signifie qu'on rajoute un bit ($\underline{0}$ ou $\underline{1}$) devant tous les entiers ; et l'opération "$\overline{G}$" signifie qu'on prend les entiers de G dans l'ordre inverse...

Calculez $\Gamma(i)$ pour $i = 1$, 2, 3 et 4.

Question 4. Le code de Gray $\Gamma(n)$ a la propriété suivante : le i-ème entier de $\Gamma(n)$ est égal à $i \oplus i/2$, ou "$\oplus$" est le le XOR bit à bit.

Calculer les entiers 17, 18, 19 et 20 de $\Gamma(6)$, et vérifiez que la propriété des code de Gray est bien vérifiée.