

info614 : Mathématiques concrètes
TD 2 : un peu d'arithmétique

Pierre Hyvernât
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22
email : Pierre.Hyvernât@univ-savoie.fr
www : <http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernât/>
wiki : <http://www.lama.univ-savoie.fr/wiki>

Exercice 1 : définitions du cours

Question 1.

- expliquez pourquoi $0 \mid n$
- est-ce que $0 \mid 0$?
- quels sont les multiples de -1 ?
- pourquoi est-ce que $\text{pgcd}(0, 0)$ est indéfini ?

Question 2. Appliquez l'algorithme d'Euclide pour calculer les nombres de Bezout associés à

- $\text{pgcd}(5, 9)$,
- $\text{pgcd}(8, 38)$,
- $\text{pgcd}(6, 21)$,
- $\text{pgcd}(22, 75)$.

Question 3. Montrer que si $a \times x + b \times y = 1$ alors on a forcément $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Question 4.

- on a $1 = 3 \times 7 - 4 \times 5$, que pouvez-vous déduire sur 3, 7, 4 et 5 ?
- on a $4 = 6 \times 9 - 5 \times 10$, que pouvez-vous déduire sur 6, 9, 5 et 10 ?

Question 5. Les nombres 537138 et 412923 ont les représentations suivantes comme produits de facteurs premiers :

$$537138 = 2 \times 3^2 \times 7^3 \times 29 \quad \text{et} \quad 412923 = 3 \times 7^2 \times 53$$

Quel est leur pgcd ?

Exercice 2 : calcul modulo

Question 1. Les équations suivantes ont-elles des solutions ? Si oui, donnez l'ensemble des solutions...

- $3x \equiv 5 \pmod{7}$
- $2x - 3 \equiv 0 \pmod{4}$
- $5x + 2 \equiv 0 \pmod{6}$

Question 2. Montrez que $(3^{77} - 1)/2$ est un nombre impair. Montrez que ce même nombre est divisible par $(3^7 - 1)/2$ pour conclure qu'il n'est pas premier.

Montrez que si k n'est pas premier, alors $2^k - 1$ (nombre de Mersenne) n'est pas premier non plus.

Question 3. Quand est-ce que $2^n - 1$ est un multiple de 3 ?

Question 4. "Pour savoir si un nombre est divisible par 9, il suffit de vérifier si la somme de ces chiffres est divisible par 9".

Expliquer pourquoi cette règle par 9 fonctionne.