info623 : Théorie des langages, calculabilité
TD 5 : langages non réguliers

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : lemme de pompage

Question 1. Redonnez l'énoncé du lemme de pompage (si possible sans regarder votre cours) en insistant sur les quantificateurs ("il existe" / "pour tout").

Question 2. Utilisez le lemme de pompage pour montrer que sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, le langage $D = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ n'est pas régulier. Justifiez attentivement votre réponse.

Que pensez-vous du même langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a\}$?

Question 3. Utilisez le lemme de pompage pour montrer que le langage $L = \{a^n b^m \mid n < m\}$ n'est pas régulier. Justifiez attentivement votre réponse.

Même question pour le langage $L' = \{a^n b^m \mid n > m\}$.

Question 4. Montrez que les langages
- $L_1 = \{a^{n\times n} \mid n > 0\}$
- $L_2 = \{a^{2^n} \mid n > 0\}$
- $L_3 = \{a^p \mid p \text{ est premier}\}$, ne sont pas réguliers.

Question 5. Conjecturez (et prouvez ?) une condition nécessaire et suffisante sur les tailles des mots pour qu'un langage sur $\Sigma = \{a\}$ soit régulier.

Question 6. Montrez que le langage P des mots "bien parenthésés" sur le l'alphabet $\Sigma = \{\texttt{(}, \texttt{)}\}$ n'est pas régulier.

Par exemple, "`(()())`" est un mot bien parenthésé, alors que "`(()()`" n'est pas bien parenthésé.

Question 7. On considère que l'alphabet est $\{\texttt{\#}, \texttt{0}, \texttt{1}\}$. Montrez que $A = \{\underline{l}\texttt{\#}\underline{m}\texttt{\#}\underline{n} \mid n = l + m\}$ n'est pas régulier.

Remarque : si n est un entier, $\underline{n}$ dénote sa représentation en base 2 sur l'alphabet $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

Exercice 2 : langages non réguliers, sans lemme de pompage

Question 1. Montrez que le langage $L = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ n'est pas régulier en montrant que ce langage admet un nombre infini de dérivées.

Question 2. Montrez, par réduction, que le langage $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ n'est pas régulier.

Rappel : vous n'avez pas besoin de d'utiliser le lemme de pompage ou le théorème de Myhill-Nerode. Il suffit de réduire le problème à la non-régularité d'un langage connu...

Question 3. Montrez, en réduisant le problème à la régularité de $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ que le langage P des mots bien parenthésés n'est pas régulier.

Question 4. Montrez que si un langage L est régulier, et si s est un symbole et w un mot, alors le langage $L_{s:=w}$ obtenu à partir de L en remplaçant chaque symbole s par w est lui aussi régulier.

Par exemple, si $abcdaba \in L$, on a $a\varepsilon cda\varepsilon a = acdaa \in L_{b:=\varepsilon}$.

Montrez que le langage de expressions arithmétiques correctes, sur l'alphabet

$$\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}, \mathtt{+}, \mathtt{*}, \mathtt{-}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}$$

n'est pas régulier.

Exercice 3 : limites du lemme de pompage

Question 1. Soit L le langage $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Montrez que le langage $L' = cc^*L + (a+b)^*$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ est "pompable", autrement dit, que tous les mots de L' suffisamment grands ont des "boucles".

Quelle valeur de n (taille des mots pompables) choisissez vous ?

Le langage L' est il régulier ?

Question 2. On considère maintenant le langage L sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, avec $w \in L$ si et seulement si :

- w contient un mot de taille 3 avec une répétition de symbole,
- ou bien exactement un septième des symboles de w sont des a.

Par exemple, $(a\,bcd\,bcd)^4$ est dans L car il satisfait la seconde condition, et $(ab)^3(cd)^3$ est dans L car il satisfait la première condition. (Le mot $(a\,bcb)^6(bcd)^6$ satisfait les deux conditions, et il est donc dans le langage également.)

Montrez que le langage L est "pompable". Quelle valeur de n choisissez vous ?

Le langage L est il régulier ?