

**info623 : Théorie des langages, calculabilité**  
**TD 6 : grammaires hors contexte**

Pierre Hyvernât  
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie  
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22  
email : [Pierre.Hyvernât@univ-savoie.fr](mailto:Pierre.Hyvernât@univ-savoie.fr)  
www : <http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernât/>

**Exercice 1 : Forme de Backus-Naur**

*Question 1.* Donnez une grammaire BNF (“Backus-Naur form”) qui reconnaît exactement les langages réguliers suivants :

- $aa^*(a + b + c)^*$
- $(a + b + c)^*aa^*$
- $(a + b)^*(b + c)^*$
- $(ab + bc^*)^*aa(ab + bc + ca)^*$

Donnez tous les arbres de réductions montrant que le mot  $aa$  appartient à ces langages.

*Question 2.* Donnez une grammaire BNF pour les langages suivants :

- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ,
- l'ensemble des *palindromes* sur l'alphabet  $\{c, d, e\}$ ,
- l'ensemble des mots bien parenthésés.

Donnez les arbres de réductions pour les mots  $aaabbb$ ,  $ccecc$  et  $((()()))$ .

*Question 3.* Donnez des grammaires BNF pour les langages suivants :

- $L_1 = \{a^n b^n c^m d^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ ,
- $L_2 = \{a^n b^m c^m d^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ ,
- $L = L_1 \cup L_2$ .

Donnez l'arbre de réduction pour  $aabbcd \in L$ ,  $abbccd \in L$  et  $aabbccdd \in L$ .

Ces langages sont-ils réguliers ?

*Question 4.* On considère l'équation régulière  $X = (aXb^2 + bXaXb + bbXa)^*$ .

Donnez une grammaire BNF correspondante.

Donnez des arbres de réduction montrant que  $babbba \in L$  et  $baaabbbbbb \in L$ .

Essayez de caractériser exactement le langage correspondant.

*Question 5.* Trouvez une grammaire BNF pour le langage  $L = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ .

Donnez également une équation régulière (la plus simple possible) définissant ce langage.

Donnez un arbre de réduction montrant que  $aaababbabb \in L$ .

**Exercice 2 : Applications**

*Question 1.* Donnez une grammaire BNF pour le langage des listes d'entiers décimaux en Python :

- un entier décimal contient au moins un chiffre et ne commence pas par “0” (sauf si tous les chiffres sont des “0”),
- une liste est notée avec un “[” initial et un “]” final,
- les éléments de la liste sont séparés par des virgules “,”.

Donnez un arbre de dérivations pour  $[-1,0]$  et essayer de vérifier que votre grammaire n'est pas ambiguë.

*Remarque* : Voici des exemples de listes valides :

$[]$   $[11, +12, -1000]$   $[-000]$

et voici des exemples de listes invalides :

$[,]$   $[1,2,3,]$   $[,1,2]$   $[01]$

*Question 2.* Le langage des listes d'entiers de la question précédente est-il régulier ?

*Question 3.* Donnez une grammaire BNF simple pour les expressions régulières à la Kleene sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ .

Si votre grammaire est ambiguë, donnez une grammaire reconnaissant le même langage qui ne soit pas ambiguë.

Donnez les arbres de dérivations pour les expressions régulières  $ab^* + c + 1$ .

### **Exercice 3 : Questions difficiles (???)**

*Question 1.* Cherchez une grammaire BNF pour le langage  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

*Question 2.* Cherchez une grammaire BNF non ambiguë pour le langage  $L$  de la question 3, exercice 1.