info623 : Théorie des langages
TD 5 : langages non réguliers

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : lemme de pompage

Question 1. Redonnez la technique vue en cours ("lemme de pompage") qui permet de démontrer qu'un langage n'est pas régulier.

Question 2. Utilisez le lemme de pompage pour montrer que sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, le langage $D = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ n'est pas régulier. Justifiez attentivement votre réponse.

Que pensez-vous du même langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a\}$?

Question 3. Utilisez le lemme de pompage pour montrer que le langage $L = \{a^n b^m \mid n < m\}$ n'est pas régulier. Justifiez attentivement votre réponse.

Même question pour le langage $L' = \{a^n b^m \mid n > m\}$.

Question 4. Montrez que les langages
- $L_1 = \{a^{n\times n} \mid n > 0\}$
- $L_2 = \{a^{2^n} \mid n > 0\}$
- $L_3 = \{a^p \mid p \text{ est premier}\}$, ne sont pas réguliers.

Question 5. Conjecturez (et prouvez ?) une condition nécessaire et suffisante sur les tailles des mots pour qu'un langage sur $\Sigma = \{a\}$ soit régulier.

Question 6. Montrez que le langage P des mots "bien parenthésés" sur le l'alphabet $\Sigma = \{\texttt{(}, \texttt{)}\}$ n'est pas régulier.

Par exemple, "`(()())`" est un mot bien parenthésé, alors que "`(()()`" n'est pas bien parenthésé.

Question 7. On considère que l'alphabet est $\{\underline{+}, \underline{=}, \underline{0}, \underline{1}\}$. Montrez que $A = \{\underline{l}\,\underline{+}\,\underline{m}\,\underline{=}\,\underline{n} \mid n = l+m\}$ n'est pas régulier.

Remarque : si n est un entier, $\underline{n}$ dénote sa représentation en base 2 sur l'alphabet $\{\underline{0}, \underline{1}\}$.

Exercice 2 : langages non réguliers (sans lemme de pompage)

Question 1. Montrez que le langage $L = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ n'est pas régulier en montrant que ce langage admet un nombre infini de dérivées.

Question 2. Montrez, par réduction, que le langage $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$ n'est pas régulier.

Question 3. Montrez, en réduisant le problème à la régularité de $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ que le langage P des mots bien parenthésés n'est pas régulier.

Question 4. Montrez que si un langage L est régulier, et si s est un symbole et w un mot, alors le langage $L_{s:=w}$ obtenu à partir de L en remplaçant chaque symbole s par w est lui aussi régulier.

Par exemple, si $abcdaba \in L$, on a $a\varepsilon cda\varepsilon a = acdaa \in L_{b:=\varepsilon}$.

Montrez que le langage de expressions arithmétiques correctes, sur l'alphabet

$$\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \ldots, \texttt{9}, \texttt{+}, \texttt{*}, \texttt{-}, \texttt{(}, \texttt{)}\}$$

n'est pas régulier.