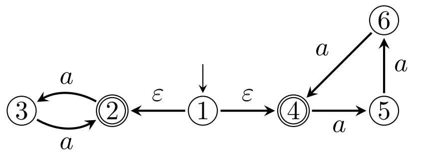
info633 : Théorie des langages
TD 4 : automates finis non déterministes

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 22, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-savoie.fr`
www : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : application du cours

Question 1. On considère l'automate suivant, sur l'alphabet $\Sigma = \{a\}$



Donnez la représentation de cet automate sous forme de table et explicitez son langage.

Question 2. Décrivez les étapes de l'algorithme qui teste si les mot $aaaa$ et $aaaaa$ sont reconnus par cet automate.

Question 3. Appliquez la construction "sous-ensemble" pour déterminiser cet automate.

L'automate obtenu est il minimal ?

Question 4. Donnez un automate qui reconnait le *complément* du langage reconnu par l'automate de la question 1.

L'automate que vous donnez est-il déterministe ou non déterministe ?

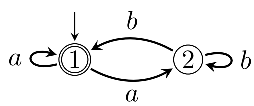
Question 5. En utilisant la méthode d'élimination des états vue en cours sur l'automate de la question précédente, calculez une expression régulière qui reconnait le complément du langage de la question 1.

Question 6. On considère l'expression $R = (aaa)^* + (aaaaa)^* + (aaaaaaa)^* + (aaaaaaaaaaa)^*$, soit, avec les notations standards, $R = a^{3*} + a^{5*} + a^{7*} + a^{11*}$.

Donnez un automate non déterministe qui reconnait le même langage. Combien d'états possède t'il ?

Essayez de deviner le nombre minimal d'états nécessaires pour un automate déterministe qui reconnaitrait le même langage...

Question 7. On considère l'automate suivant, sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:



Appliquez la construction "sous-ensembles" vue en cours pour donner un automate déterministe reconnaissant le même langage.

Déduisez en une expression régulière reconnaissant le même langage.

Question 8. Redonnez (cf TD 3) un automate déterministe sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ qui reconnait les mots contenant un nombre pair de a et un nombre pair de b.

Utilisez la méthode d'élimination des états vue en cours pour calculer une expression régulière qui reconnait le même langage.

Exercice 2 : un langage simple

Question 1. Donnez une expression régulière sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ dont le langage associé est l'ensemble des mots dont la 3ème lettre en partant de la droite est "a".

Question 2. Donnez un automate non déterministe *à la main* qui reconnait le même langage.

Combien d'états l'automate possède t'il ?

Question 3. Calculez l'automate non déterministe *à la Thompson* qui reconnait le même langage, en partant de l'expression régulière trouvée précédemment.

Combien d'états l'automate possède t'il ?

Question 4. Expliquer ce qu'il se passe lorsqu'on teste si les mots suivants sont acceptés par les automates de la question 2 et 3 :
- *bababa*,
- *aaabbb*.

Question 5. En partant de l'automate de la question 2, construisez un automate *déterministe* qui reconnait le même langage en utilisant la construction "sous-ensemble".

Combien d'états l'automate possède t'il ?

Question 6. En partant de l'expression régulière de la question 1, calculez, en utilisant les dérivées, un automate *non déterministe* pour le même langage.

Comparez cet automate avec celui de la question 2.

Question 7. En partant de l'expression régulière de la question 1, calculez, en utilisant les dérivées, un automate *déterministe* pour le même langage.

Comparez cet automate avec celui de la question 5.

Question 8. Donnez une expression régulière pour le complément du langage considéré jusqu'à présent.

Question 9. Refaites les questions 1, 2 et 3 pour le langage des mots dont la n-ème lettre en partant de la droite est un a.

Exercice 3 : Une expression régulière inattendue

Question 1. On s'intéresse aux mots sur l'alphabet $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}$. Chaque mot représente en entier écrit en base 2 : par exemple, le mot $\underline{\mathtt{001101}}$ correspond à l'entier 13.

Construisez un automate (déterministe) qui reconnait exactement l'ensemble des mots pour lesquels l'entier correspondant est divisible par 3. L'automate aura 3 états :
- un état s_0 pour les mots dont l'entier correspondant est égal à 0 modulo 3,
- un état s_1 pour les mots dont l'entier correspondant est égal à 1 modulo 3,
- un état s_2 pour les mots dont l'entier correspondant est égal à 2 modulo 3.

Rappel : lorsqu'on ajoute un $\underline{\mathtt{0}}$ derrière un nombre écrit en base 2, cela revient à le multiplier par 2 ; lorsqu'on ajoute un $\underline{\mathtt{1}}$, cela revient à le multiplier par 2 et ajouter 1. Les transitions de votre automate doivent refléter ceci...

Par exemple, $\underline{\mathtt{1101}}$ n'est pas dans le langage, car 13 n'est pas divisible par 3 et $\underline{\mathtt{1001}}$ est dans le langage car l'entier correspondant est 9, qui est divisible par 3.

Question 2. En utilisant la méthode d'élimination des états vue en cours, calculez une expression régulière sur le langage $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}$ qui reconnait le même langage.

Testez votre expression régulière sur quelques exemples...