info607 : Mathématiques pour l'informatique
TD 1 : codes correcteurs d'erreurs

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université Savoie Mont Blanc
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Question 1. Donnez une matrice génératrice et une matrice de parité pour le code "3 répétitions" sur 3 bits.

Exercice 1 : code "deux sur cinq"

Au début de l'informatique (IBM 7070 par exemple), une case mémoire était représentée par une série de cinq ampoules. Pour repérer facilement les erreurs, on imposait que exactement deux de ces cinq ampoules soient toujours allumées...

Question 1. Expliquez pourquoi ceci peut être considéré comme un code correcteur.

Question 2. Combien de mots ce code possède-t'il ?

Question 3. Énumérez tous les mots du code. Combien d'erreurs peut-on détecter ? Corriger ?

Question 4. Est-ce que ce code est linéaire ?

Exercice 2 : code de Hamming

Le code de Hamming permet de coder 4 bits de données "*dddd*"en ajoutant 3 bits de parité : "*ddd_d__*".

On calcule les bits de parité sur ce mot de 7 bits de la manière suivante :
- le bit de parité de droite (bit numéro $1 = 2^0$) contient la parité des bits dont le numéro en binaire contient 2^0 (c'est à dire les bits 1,3,5 et 7) ;
- le bit de parité numéro $2 = 2^1$ contient la parité des bits dont le numéro en binaire contient un 2^1 (c'est à dire les bits 2,3,6 et 7) ;
- le bit de parité numéro $4 = 2^2$ contient la parité des bits dont le numéro en binaire contient un 2^2 (c'est à dire les bits 4,5,6 et 7).

Question 1. Codez les mots 1101 et 0100.

Question 2. Donnez une matrice génératrice de ce code.

Exercice 3 : code de Hamming, variante

Une matrice génératrice (en forme simple) pour un code équivalent au code de Hamming est

$$M = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Question 1. Combien de mots ce code possède-t'il ? Donnez la liste de ces mots.

Question 2. On veut coder la suite 01101010110. Comment procède-t'on ?

Question 3. Quelle est la distance de ce code ? Combien d'erreurs peut-on détecter ? Corriger ?

Question 4. On suppose que lors de la transmission, au plus 1 erreur a été commise. Pouvez-vous corriger les messages suivants :
- 1101111
- 0011111
- 0101010
- 1101011
- 0110110

Question 5. On suppose que lors de la transmission, au plus 2 erreurs ont été commises. Pouvez-vous corriger les messages suivants :
- 1101111
- 1111011
- 0000111

Question 6. Donnez la matrice de parité correspondant à ce code.

Question 7. En utilisant la multiplication des matrices appropriées, décidez si les mots suivants sont dans le code :
- 0011001
- 1101001
- 1110100
- 1001011

Question 8. On veut rajouter un premier bit de parité au code. Donnez une matrice génératrice de ce nouveau code (en forme simple).

Question 9. On supprime le troisième bit de ce nouveau code. Donnez une matrice génératrice, sans modifier l'ordre des colonnes.

Exercice 4 : un autre code ?

On s'intéresse au code linéaire dont la matrice de parité est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les lignes de cette matrice sont exactement les entiers de 1 à 7 écrit en binaire...

Question 1. Est-ce que les mots suivants sont corrects ?
- 0000000
- 1010101
- 0101000

Question 2. Combien de mots se code possède-t'il ?

Question 3. Donnez une matrice génératrice de ce code et énumérez les mots corrects.

Exercice 5 : un code "glouton"

On regarde les mots de 4 bits générés de la manière suivante : à chaque étape, on rajoute le plus petit mot qui a au moins 2 bits différents avec tous les mots déjà pris. (De cette manière, le code a une distance d'au moins 2...)

Question 1. Donnez tous les mots du code.

Question 2. Est-ce que ce code est linéaire ? Quelle est sa distance ?

Si oui, donnez une matrice génératrice de ce code. Quel est ce code ?