

**info607 : Mathématiques pour l'informatique**  
**TD 2 codes de Reed-Solomon (QR-codes)**

Pierre Hyvernat

François Boussion

Laboratoire de mathématiques de l'université Savoie Mont Blanc

bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22

email : [Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr](mailto:Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr)

www : <http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/>

**Exercice 1 : préliminaires**

Nous allons regarder les codes correcteurs utilisés dans le QR codes dans une version plus simple : au lieu de considérer des octets (entre 0x00 et 0xff), nous allons considérer des demi-octets (entre 0x0 et 0xf).

Les opérations d'addition et de multiplication sont notées  $\oplus$  et  $\otimes$ . L'addition  $\oplus$  est simplement le XOR...

*Question 1.* Combien valent

- $0x3 \oplus 0x3$
- $0x3 \oplus 0x7$
- $0x3 \oplus 0x4$
- $0x5 \oplus 0xf$

*Question 2.* Il y a plusieurs manières de calculer (et programmer) la multiplication  $\otimes$

- en considérant les demi-octets comme des polynômes à coefficients booléens, et en effectuant la multiplication *modulo*  $X^4 \oplus X \oplus 1$ ,
- en codant en dur la table de multiplication,
- en utilisant le *logarithme*.

Quelle taille en mémoire fera la table de multiplication pour les demi-octets et pour les octets ?

*Question 3.* Le demi octet 0x5 (0101 en binaire) représente le polynome  $0X^3 \oplus 1X^2 \oplus 0X^1 \oplus 1X^0$ , c'est à dire  $X^2 \oplus 1$ .

- calculez le polynôme obtenu en multipliant  $X^2 \oplus 1$  par le polynome correspondant à 0x6,
- divisez le résultat obtenu (division euclidienne) par  $X^4 \oplus X \oplus 1$ ,
- déduisez-en le résultat de  $0x5 \otimes 0x6$ .

*Question 4.* Le tableau suivant contient les puissances successive  $0x2^n$  pour  $n$  variant de 0 à 15. Complétez le.

0    1    2    3    4    5    6    7    8    9    10    11    12    13    14    15

EXP = [ 0x1 0x2 \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ 0xc 0xb 0x5 \_\_\_ 0x7 0xe 0xf 0xd 0x9 \_\_\_ ]

*Question 5.* Donnez le tableau LOG des logarithmes correspondants

*Question 6.* En utilisant les tables de logarithmes / puissances, calculez

- $0x5 \otimes 0x6$
- $0x2 \otimes 0x7$
- $0x9 \otimes 0x3$

Quel est l'inverse de 0x9 ?

*Question 7.* Parmi les 3 méthodes pour calculer la multiplication, laquelle vous paraît-elle la meilleure ?

### Exercice 2 : codage

Nous allons maintenant coder des suites de 3 demi-octets en ajoutant 2 demi-octets...

La suite "0x1 0x0 0x7" sera interprétée comme le polynôme  $P = 0x1X^2 \oplus 0x0X \oplus 0x7$ .

*Question 1.* Calculez les coefficients du polynôme  $G = (X \oplus 0x2^0)(X \oplus 0x2^1)$ .

*Question 2.* Calculez les coefficients de  $M = PG$ . Il s'agit du message qu'on enverra.

*Question 3.* Voici une autre manière d'obtenir un message avec redondance équivalent : calculez le reste de  $R = X^2P/G$  et le polynôme  $M' = X^2P \oplus R$ .

*Question 4.* Calculez les syndromes :  $M(0x2^0)$  et  $M(0x2^1)$ , idem pour  $M'$ .

*Question 5.* On suppose que le coefficient de degré 2 subit une erreur de 0x3, c'est à dire que ce  $c_2$  coefficient est remplacé par  $c_2 \oplus 0x3$ .

Calculez les syndromes des polynômes  $M$  et  $M'$  modifiés. Que constatez vous ?