Déduction naturelle – 3

Il y a 2 règles par connecteur logique ($\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$) et 2 autres règles.

$$\frac{\Gamma; F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ (\text{modus ponens})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_i}\ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\ (\vee_{c,i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \qquad \Gamma; F_1 \vdash G \qquad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ (\text{raisonnement par cas})$$

$$\frac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\text{contradiction})$$

$$\frac{}{\Gamma; F \vdash F}\ (\text{axiome}*) \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\text{raisonnement par l'absurde})$$

Pour les règles $\wedge_i$ et $\vee_{c,i}$, "i" peut prendre les valeurs 1 et 2.

Les règles avec une étoile "*" sont les règles inversibles : on peut les utiliser sans risque de rendre la preuve impossible.

Remarque : il n'est pas nécessaire d'apprendre ces règles par cœur...

Nouvelles règles de démonstration

On garde les règles de démonstration de la logique propositionnelle, et on ajoute 2 règles pour chaque quantificateur :

$$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\ (\forall_c *)^{(i)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}{\Gamma \vdash F(u)}\ (\textbf{spécialisation})^{(ii)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)}\ (\exists_c)^{(ii)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F(x) \qquad \Gamma ; F(x_0) \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\textbf{utilisation du } \exists)^{(iii)}$$

Attention :

- (i) dans la règle $(\forall_c)$, x est une variable qui n'est pas libre dans le séquent,
- (ii) dans les règle (spécialisation) et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire,
- (iii) dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable qui n'est pas libre dans le séquent.