INFO501 : logique (et informatique)
Examen
$\boxed{\text{AVEC SOLUTIONS}}$

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Un barème provisoire est donné dans la marge.

1 point négatif sera réservé à la présentation de vos réponses...

Partie 1 : calcul des prédicats

(3) *Question 1.*
- Quand est-ce que 2 formules du calcul des prédicats sont *logiquement équivalentes* ?
- Quand est-ce que 2 formules du calcul des prédicats sont *équisatisfiables* ?
- Donnez des exemples de
  . 2 formules équivalentes et différentes,
  . 2 formules équisatisfiables et non-équivalentes,
  . 2 formules non-équisatisfiables.

Éléments de réponse :
- 2 formules sont logiquement équivalentes si elles ont la même table de vérité. (Ou, de manière équivalente, F et G sont logiquement équivalentes si $F \Leftrightarrow G$ est une tautologie.)
- 2 formules F et G sont equisatisfiable si F est satisfiable exactement lorsque G est satisfiable.
  . $\neg(A \vee B)$ et $\neg A \vee \neg B$ sont équivalentes.
  . F et $(F \vee A) \wedge (F \vee \neg A)$ sont équistatisfiables (quelle que soit la formule F).
  . $A \vee \neg A$ et $A \wedge \neg A$ ne sont pas équisatisfiables.

(3) *Question 2.* Démontrez, en utilisant uniquement les règles de démonstration données à la fin du sujet, le séquent suivant :

$$B \vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Donnez le nom de chaque règle utilisée. (cf. liste des règles à la fin du sujet)

Éléments de réponse :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \ \vdash\ A \Rightarrow \neg B}\text{axiome} \qquad \dfrac{}{\ldots \ \vdash\ A}\text{axiome}}{B; A \Rightarrow \neg B; A \ \vdash\ \neg B}\text{(modus ponens)} \qquad \dfrac{}{B; A \Rightarrow \neg B; A \ \vdash\ B}\text{axiome}}{B; A \Rightarrow \neg B; A \ \vdash\ \bot}\text{(contradiction)}}{B; A \Rightarrow \neg B \ \vdash\ \neg A}\neg_c}{B \ \vdash\ (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A}\Rightarrow_c$$

(2) *Question 3.* Donnez, en justifiant, une formule en forme normale conjonctive équivalente à "$\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg D)$".

Éléments de réponse :

$$\begin{array}{rl} & \neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg D) \\ [F \Rightarrow G \text{ equivalent à } \neg F \vee G] & \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) \\ [\neg\neg F \text{ equivalent à } F] & \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) \\ [\text{distributivité entre } \vee \text{ et } \wedge, \text{ 2 fois}] & \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (A \vee \neg D) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg D) \end{array}$$

(2) *Question 4.* La formule $(A \wedge B) \Leftrightarrow \big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big)$ est elle démontrable ?
Utilisez la méthode de votre choix pour justifier précisément votre réponse.

Éléments de réponse : on calcule les tables de vérité de $(A \wedge B)$ et $A \wedge (A \Rightarrow B)$

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

et

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Elles sont identiques, les deux formules sont donc équivalentes. Par le théorème de complétude, la formule $(A \wedge B) \Leftrightarrow \big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big)$ est donc démontrable.

(2) *Question 5.* Appliquez, en détaillant ce que vous faites, la *propagation des contraintes booléennes* (simplification des clauses unitaires et des littéraux purs) sur la formule en FNC suivante :

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$$

Déduisez-en des valeurs pour $x_1, \ldots, x_5$ qui rendent la formule vraie.

Éléments de réponse :

$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
(x_4) est une clause unitaire — $x_4 = 1$
$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \quad) \quad \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \quad \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
(x_5) est strictement négatif — $x_5 = 0$
$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \quad) \quad \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$
on fait un choix — $x_1 = 1$
$(\quad x_3 \quad)$
(x_3) est strictement positif — $x_3 = 1$
"formule vide"
la formule est vraie !

On a donc trouvé une solution : $x_1 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$.

Partie 2 : logique du premier ordre

(2) *Question 1.* Donnez une formule du premier ordre pour représenter la phrase suivante *"La fonction f est de période p."*

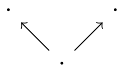
Rappel : f est périodique de période p si
- $f(x) = f(x + p)$ est toujours vrai,
- et si p est le plus petit nombre vérifiant ceci (autre que 0 bien entendu).

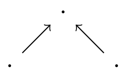
Éléments de réponse :

$$\Big(\forall x, f(x) = f(x+p)\Big) \quad \wedge \quad \Big(\forall q, \quad \big(\forall x, f(x) = f(x+q)\big) \Rightarrow \big(q = 0 \vee p \leq q\big)\Big)$$

(2) *Question 2.* On considère le langage avec une seule relation binaire notée $<$. La formule atomique "$x < y$" est interprétée comme "il y a une flèche de x vers y".

Donnez une formule qui est vraie dans un des deux modèles suivants, et fausse dans l'autre.

- premier modèle : 

- second modèle : 

Éléments de réponse : la formule $\exists x, \forall y, (x = y \vee x < y)$ ("il y a un minimum") est vraie dans le premier modèle, et fausse dans le second modèle.

(2) *Question 3.* La "preuve" suivante est incorrecte. Identifiez précisément les erreurs d'application des règles.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{(axiome)}}{\ldots \ \vdash \ (\exists x, P(x)) \Rightarrow Q} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{(axiome)}}{\ldots \ \vdash \ P(x) \Rightarrow Q} \quad \dfrac{\text{(axiome)}}{\ldots \ \vdash \ P(x)}}{P(x) \Rightarrow Q; P(x) \ \vdash \ Q}\text{(modus ponens)}}{(\exists x, P(x)) \Rightarrow Q; P(x) \ \vdash \ Q}\text{(utilisation du }\exists)}{(\exists x, P(x)) \Rightarrow Q \ \vdash \ P(x) \Rightarrow Q}(\Rightarrow_c)}{(\exists x, P(x)) \Rightarrow Q \ \vdash \ \forall x, (P(x) \Rightarrow Q)}(\forall_c)$$

Éléments de réponse : il y a 2 erreurs lors de l'application de la règle "(utilisation du $\exists$)".
- Le connecteur principal de "$(\exists x, P(x)) \Rightarrow Q$" n'est pas le connecteur $\exists$, mais l'implication. On ne peut donc pas utiliser la règle "(utilisation du $\exists$)" ;
- Lorsqu'on utilise la règle "(utilisation du $\exists$)", il faut introduire une variable *qui n'est pas libre dans le reste du séquent*. Ici, la variable x est libre dans la conclusion "$P(x) \ \vdash \ Q$".

(2) *Question 4.* Donnez une nouvelle règle de démonstration correspondant au principe de récurrence : *"pour prouver que $\forall n, F(n)$, il suffit de prouver $F(0)$ et que $F(n+1)$ est une conséquence de $F(n)$".*

Éléments de réponse :

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash \ F(0) \qquad \Gamma; F(n) \ \vdash \ F(n+1)}{\Gamma \ \vdash \ \forall n, F(n)}\text{(récurrence)}$$

à condition que n ne soit pas libre dans Γ.

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle. (Les règles avec une étoile "*" sont celle que l'on peut toujours appliquer sans risque de rendre la preuve impossible.)

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\ \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_i}\ (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\ (\vee_{c,i}) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \qquad \Gamma; F_1 \vdash G \qquad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\ \text{(raisonnement par cas)}$$

$$\frac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_c *) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ \text{(contradiction)}$$

$$\frac{}{\Gamma; F \vdash F}\ \text{(axiome*)} \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ \text{(raisonnement par l'absurde)}$$

Et voici les règles supplémentaires pour la logique du premier ordre.

$$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\ (\forall_c *, \text{ voir note}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}{\Gamma \vdash F(u)}\ \text{(spécialisation)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)}\ (\exists_c) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x, F(x) \qquad \Gamma; F(x_0) \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \text{(utilisation du } \exists \text{, voir note)}$$

Notes :

- dans la règle ($\forall_c$), x est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans les règle (spécialisation) et ($\exists_c$), u est un terme arbitraire.