INFO501 : logique (et informatique)
Examen

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Durée : 1h30.
Documents et calculatrices interdits.
Un barème provisoire est donné dans la marge.
1 point négatif sera réservé à la présentation de vos réponses...

Partie 1 : calcul des prédicats

(3) *Question 1.*
- Quand est-ce que 2 formules du calcul des prédicats sont *logiquement équivalentes* ?
- Quand est-ce que 2 formules du calcul des prédicats sont *équisatisfiables* ?
- Donnez des exemples de
  . 2 formules équivalentes et différentes,
  . 2 formules équisatisfiables et non-équivalentes,
  . 2 formules non-équisatisfiables.

(3) *Question 2.* Démontrez, en utilisant uniquement les règles de démonstration données à la fin du sujet, le séquent suivant :

$$B \vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$$

Donnez le nom de chaque règle utilisée. (cf. liste des règles à la fin du sujet)

(2) *Question 3.* Donnez, en justifiant, une formule en forme normale conjonctive équivalente à "$\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg D)$".

(2) *Question 4.* La formule $(A \wedge B) \Leftrightarrow \big(A \wedge (A \Rightarrow B)\big)$ est elle démontrable ?
Utilisez la méthode de votre choix pour justifier précisément votre réponse.

(2) *Question 5.* Appliquez, en détaillant ce que vous faites, la *propagation des contraintes booléennes* (simplification des clauses unitaires et des littéraux purs) sur la formule en FNC suivante :

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$$

Déduisez-en des valeurs pour x_1, ..., x_5 qui rendent la formule vraie.

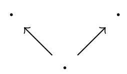
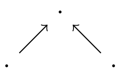
Partie 2 : logique du premier ordre

(2) *Question 1.* Donnez une formule du premier ordre pour représenter la phrase suivante *"La fonction f est de période p."*

Rappel : f est périodique de période p si
- $f(x) = f(x+p)$ est toujours vrai,
- et si p est le plus petit nombre vérifiant ceci (autre que 0 bien entendu).

(2) *Question 2.* On considère le langage avec une seule relation binaire notée $<$. La formule atomique "$x < y$" est interprétée comme "il y a une flèche de x vers y".

Donnez une formule qui est vraie dans un des deux modèles suivants, et fausse dans l'autre.

- premier modèle : 
- second modèle : 

(2) *Question 3.* La "preuve" suivante est incorrecte. Identifiez précisément les erreurs d'application des règles.

$$\dfrac{\dfrac{(\text{axiome})}{\ldots \vdash (\exists x, P(x)) \Rightarrow Q} \qquad \dfrac{\dfrac{(\text{axiome})}{\ldots \vdash P(x)\Rightarrow Q} \quad \dfrac{(\text{axiome})}{\ldots \vdash P(x)}}{P(x)\Rightarrow Q; P(x) \vdash Q}\,\text{(modus ponens)}}{\dfrac{\dfrac{(\exists x,P(x))\Rightarrow Q; P(x) \vdash Q}{(\exists x,P(x))\Rightarrow Q \vdash P(x)\Rightarrow Q}\,(\Rightarrow_c)}{(\exists x,P(x))\Rightarrow Q \vdash \forall x,(P(x)\Rightarrow Q)}\,(\forall_c)}\,\text{(utilisation du } \exists)$$

(2) *Question 4.* Donnez une nouvelle règle de démonstration correspondant au principe de récurrence : *"pour prouver que $\forall n, F(n)$, il suffit de prouver $F(0)$ et que $F(n+1)$ est une conséquence de $F(n)$"*.

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle. (Les règles avec une étoile "*" sont celle que l'on peut toujours appliquer sans risque de rendre la preuve impossible.)

$$\dfrac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow_c{*}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\,\text{(modus ponens)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\,(\wedge_c{*}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_i}\,(\wedge_i)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee_{c,i}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2 \qquad \Gamma; F_1 \vdash G \qquad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,\text{(raisonnement par cas)}$$

$$\dfrac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg_c{*}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\,\text{(contradiction)}$$

$$\dfrac{}{\Gamma; F \vdash F}\,\text{(axiome*)} \qquad \dfrac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\,\text{(raisonnement par l'absurde)}$$

Et voici les règles supplémentaires pour la logique du premier ordre.

$$\dfrac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\,(\forall_c{*}\text{, voir note}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}{\Gamma \vdash F(u)}\,\text{(spécialisation)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)}\,(\exists_c) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \exists x, F(x) \qquad \Gamma; F(x_0) \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\text{(utilisation du } \exists\text{, voir note)}$$

Notes :

- dans la règle $(\forall_c)$, x est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans les règle (spécialisation) et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire.
