INFO501 : logique (et informatique)
TD : logique propositionnelle

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : formules

Question 1. Donnez une formule propositionnelle (en introduisant des formules atomiques adéquates) pour les phrases suivantes.

- "S'il pleut, je prend mon parapluie, et s'il fait froid, je prend mon bonnet."
- "S'il fait beau, je vais travailler en vélo, mais quand je suis en retard, je prend le bus."
- "Si tu ranges ta chambre, tu pourras aller au cinéma."
- "N'oublie pas ton écharpe, il fait froid."
- "Si f est une fonction dérivable, alors c'est aussi une fonction continue."
- "n est un multiple de 12 dès que n est un multiple de 2 et de 3."
- "Si n est un nombre premier, alors il est impair, sauf si c'est 2."

Question 2. Donnez le connecteur principal des formules suivantes :

$$A \wedge (B \Rightarrow C) \qquad \neg(A \wedge (B \vee \neg C)) \qquad A \vee B \vee C \vee D \qquad A \Rightarrow B \Rightarrow C$$

$$A \wedge B \vee C \wedge D \qquad \neg\neg\neg(B \Leftrightarrow C) \qquad \neg A \wedge B \Rightarrow C \qquad A \Rightarrow B \vee \neg(C \wedge D \Rightarrow E)$$

Question 3. Dessinez l'arbre correspondant à chaque formule de la question précédente.

Exercice 2 : connecteurs logiques et tables de vérité

Question 1. Rappelez les tables de vérité des connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ et $\neg$.

Question 2. Retrouvez la table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ en étudiant les différents cas correspondants à la formule (vraie) *"Si n est un multiple de 4, alors n est pair."*.

Vérifiez que cette table de vérité est la même que celle de $\neg A \vee B$.

Question 3. Calculez les tables de vérité pour vérifier que les 2 formules suivantes sont équivalentes :

- $A \vee (B \wedge C)$,
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Question 4. La table de vérité du XOR (noté $\oplus$) est

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Donnez une formule ayant la même table de vérité que $A \oplus B$ en utilisant les connecteurs usuels. N'oubliez pas de vérifier...

Question 5. En mathématique, on dit en général "A ssi B ssi C" pour dire que les trois formules A, B et C sont équivalentes.

Peut-on mettre des parenthèses dans $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ pour avoir cette interpretation ?

Sinon, comment peut-on traduire "A ssi B ssi C" en logique propositionnelle ?

Question 6. Donnez une formule équivalente à $A \wedge B$ en n'utilisant que la disjonction ($\vee$) et la négation ($\neg$).

Question 7. En utilisant les équivalences logique standard (lois de de Morgan, distributivité, etc.), montrez que les 2 formules suivantes sont équivalentes :

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{et} \qquad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Question 8. Le symbole de Sheffer ($\uparrow$) est un connecteur binaire avec la table de vérité suivante :

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

Il agit comme la négation d'une conjonction : “pas les deux”.

À quoi correspond $A \uparrow A$?

Montrez que l'on peut redéfinir tous les opérateurs usuels uniquement à partir de $\uparrow$.

Question 9. Combien de connecteurs binaires existe t'il ? Énumérez les et donnez leurs un nom.

Cherchez combien ont la propriété de complétude fonctionnelle (comme “$\uparrow$”), à savoir de pouvoir redefinir tous les connecteurs usuels, et donc toutes les fonctions booléennes.

Question 10. Rappelez les définitions de “tautologie” et de “formule satisfiable”.

Question 11. Les formules suivantes sont elles des tautologies ? Sont elles satisfiables ?

$$A \vee \neg A \qquad\qquad (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

$$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B) \qquad\qquad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

Question 12. Vérifiez que la “loi de Peirce” $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ est une tautologie en calculant sa table de vérité.

Question 13. Au pire cas, combien faut il calculer de lignes d'une table de vérité pour vérifier si une formule est une tautologie ?

Et au meilleur cas ?

Et pour vérifier si une formule est satisfiable ?

Question 14. Que pensez-vous de l'algorithme “bête” qui calcule la table de vérité d'une formule pour vérifier si elle est satisfiable ?

À partir de combien de variables est-ce que cet algorithme risque de ne plus fonctionner ?

Question 15. Justifiez l'assertion : $\neg F$ *est une tautologie si et seulement si* F *n'est pas satisfiable.*

Exercice 3 : satisfiabilité, résolution et algorithme DPLL

Question 1. Donnez une formule en FNC (“forme normale conjonctive”) pour les tables de vérité suivantes

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	G
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Question 2. Donnez les tables de vérité puis une formule en FNC pour les formules
- $S \Leftrightarrow (A \oplus B \oplus C)$,
- $C' \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$.

Question 3. Pour chacune des formules suivantes, donnez une formule en FNC équivalente sans passer par les tables de vérité.

$$A \wedge B \qquad A \vee B \qquad A \Leftrightarrow B \qquad (A \wedge B) \vee \neg(C \Rightarrow D)$$

Question 4. Décrivez une procédure (récursive) qui permet de transformer n'importe quelle formule en formule en FNC logiquement équivalente.

Question 5. Estimez la taille minimale d'une formule en FNC logiquement équivalente à

$$(A_1 \wedge B_1) \vee \cdots \vee (A_k \wedge B_k)$$

Indice : commencez avec $k = 2$ et $k = 3$.

Question 6. Vérifiez que la formule

$$(C_1 \vee \cdots \vee C_k) \wedge (\neg C_1 \vee A_1) \wedge (\neg C_1 \vee B_1) \wedge \cdots (\neg C_k \vee A_k) \wedge (\neg C_k \vee B_k)$$

est equisatisfiable avec la formule de la question précédente.
Indice : chaque variable C_i "représente" la clause $(A_i \vee B_i)$.

Question 7. On s'intéresse à la transformation qui découpe une clause en 2 de la manière suivante :

$$F = (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee \ldots \vee l_n) \wedge \cdots \quad \mapsto \quad F' = (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee x) \wedge (\neg x \vee \ldots \vee l_n) \wedge \cdots$$

où x est une nouvelle variable propositionnelle.
- Les deux formules sont elles équivalentes ?
- Les deux formules sont elles équi-satisfiables ?
- En appliquant cette transformation plusieurs fois, peut-on réduire toutes les clauses à 4 litteraux ? À 3 littéraux ? À 2 litteraux ?

Question 8. Faites tourner l'algorithme naïf pour SAT sur les formules suivantes :
- $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
- $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1)$
- $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$

Cet algorithme instancie les variables dans l'ordre (x_1, puis x_2, etc.) et essaie en premier la valeur 1.

Question 9. Donnez un exemple de formule où l'algorithme naïf est exponentiel car seule la dernière solution testée est valide.

Question 10. Appliquez les règles de propagation des clauses unitaires et de simplification des littéraux purs sur les formules suivantes.

Le résultat est il satisfiable ?
- $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$
- $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$
- $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$

Question 11. En pratique, on n'implémente pas la simplification des clauses pures car cela est trop lent.

Faites tournez l'algorithme DPLL *en utilisant uniquement la simplification des clauses unitaires* sur les formules de la question 8.

Exercice 4 : déduction naturelle

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle.

$$\dfrac{\Gamma, F \ \vdash\ G}{\Gamma \ \vdash\ F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow_c *) \qquad \dfrac{\Gamma \ \vdash\ F \Rightarrow G \qquad \Gamma \ \vdash\ F}{\Gamma \ \vdash\ G}\,(\text{modus ponens})$$

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash\ F_1 \qquad \Gamma \ \vdash\ F_2}{\Gamma \ \vdash\ F_1 \wedge F_2}\,(\wedge_c *) \qquad \dfrac{\Gamma \ \vdash\ F_1 \wedge F_2}{\Gamma \ \vdash\ F_i}\,(\wedge_i)$$

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash\ F_i}{\Gamma \ \vdash\ F_1 \vee F_2}\,(\vee_{c,i}) \qquad \dfrac{\Gamma \ \vdash\ F_1 \vee F_2 \qquad ???????????}{\Gamma \ \vdash\ G}\,(\text{raisonnement par cas})$$

$$\dfrac{\Gamma; F \ \vdash\ \bot}{\Gamma \ \vdash\ \neg F}\,(\neg_c *) \qquad \dfrac{\Gamma \ \vdash\ \neg F \qquad \Gamma \ \vdash\ F}{\Gamma \ \vdash\ \bot}\,(\text{contradiction})$$

$$\dfrac{}{\Gamma; F \ \vdash\ F}\,(\text{axiome*}) \qquad \dfrac{\Gamma; \neg F \ \vdash\ \bot}{\Gamma \ \vdash\ F}\,(\text{raisonnement par l'absurde})$$

Les règles avec une étoile "*" sont celle que l'on peut toujours appliquer sans risque de rendre la preuve impossible.

Question 1. Rappelez le sens "intuitif" de la notation "$H_1, H_2, \ldots, H_k \ \vdash\ F$" et d'une règle de la forme

$$\dfrac{\Delta_1 \ \vdash\ G_1 \qquad \Delta_2 \ \vdash\ G_2 \qquad \ldots}{\Gamma \ \vdash\ C}$$

Question 2. Complétez la règle manquante et justifiez son nom "raisonnement par cas".

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash\ F_1 \vee F_2 \qquad ???????????}{\Gamma \ \vdash\ G}\,(\text{raisonnement par cas})$$

Question 3. Quelles sont les règles qui permettent de démontrer l'absurde ("$\bot$"), c'est à dire d'obtenir un séquent de la forme $\Gamma \ \vdash\ \bot$?

Question 4. Démontrez la loi de distributivité $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Démontrez ensuite la réciproque $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow \big(A \vee (B \wedge C)\big)$.

Question 5. Démontrez la loi de "contraposition" : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Essayez de démontrez sa réciproque : $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. (C'est plus difficile !)

Question 6. Démontrez la "loi de Peirce" $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

Indice : il faudra utiliser un raisonement par l'absurde...

Question 7. Démontrez l'équivalence $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ en montrant les 2 implications.

Indice : il faudra utiliser un raisonement par l'absurde pour l'implication $\neg\neg A \Rightarrow A$...

Question 8. Difficile : démontrez la tautologie $A \vee \neg A$.

Indice : il faudra utiliser un raisonement par l'absurde...

Question 9. On pourrait rajouter de nombreuses règles de démonstration, mais ce n'est pas nécessaire car on peut retrouver ces règles à partir des règles de bases.

Montrer par exemple que les règles suivantes sont dérivables :

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash\ T \qquad \Gamma; T \ \vdash\ C}{\Gamma \ \vdash\ C}\,(\text{coupure}) \qquad \dfrac{\Gamma; A; B \ \vdash\ C}{\Gamma; A \wedge B \ \vdash\ C}$$