Déduction naturelle – 3

Il y a 2 règles par connecteur logique ($\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$) et 3 autres règles.

$$\frac{\Gamma; F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_c) \qquad \frac{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash F}{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash G}\ (\Rightarrow_h\ \dagger)\ /\ (\textbf{modus ponens}\dagger)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_c) \qquad \frac{\Gamma; F_1; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \wedge F_2 \vdash G}\ (\wedge_h)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\ (\vee_{c,i}\dagger) \qquad \frac{\Gamma; F_1 \vdash G \qquad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \vee F_2 \vdash G}\ (\vee_h)\ /\ (\textbf{raisonnement par cas})$$

$$\frac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\ (\neg_c) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\ (\textbf{contradiction}\dagger)$$

$$\frac{}{\Gamma; F \vdash F}\ (\textbf{axiome}) \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\ (\textbf{raisonnement par l'absurde})$$

$$\frac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma; G \vdash F}{\Gamma \vdash F}\ (\textbf{résultat intermédiaire}\dagger)$$

Pour la règle $\vee_{c,i}$, "i" peut prendre les valeurs 1 et 2.

Attention aux règles avec le symbole "$\dagger$" : elles peuvent rendre la preuve impossible !

Remarque : il n'est pas nécessaire d'apprendre ces règles par cœur...

Nouvelles règles de démonstration

On garde les règles de démonstration de la logique propositionnelle, et on ajoute 2 règles pour chaque quantificateur :

$$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\ (\forall_c)^{(i)} \qquad \frac{\Gamma; \forall x, F(x); F(u) \vdash C}{\Gamma; \forall x, F(x) \vdash C}\ (\forall_h)\ /\ \textbf{(spécialisation)}^{(ii)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)}\ (\exists_c \dagger) \qquad \frac{\Gamma; F(x_\mathbf{0}) \vdash C}{\Gamma; \exists x, F(x) \vdash C}\ (\exists_h)\ /\ \textbf{(utilisation du } \exists\textbf{)}^{(i)}$$

Attention :

- (i) dans les règles $(\forall_c)$ et $(\exists_h)$, x / x_0 ne doit pas être libre dans le séquent,
- (ii) dans les règles $(\forall_h)$ et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire.