INFO501 : logique (et informatique)
Examen

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Un barème provisoire est donné dans la marge.

1 point négatif sera réservé à la présentation de vos réponses...

Partie 1 : calcul propositionel

(3) *Question 1.*

- Rappelez la table de vérité de l'implication "$\Rightarrow$".

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

- La formule $\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow A\big) \Rightarrow A$ est elle une tautologie ?
- Cette même formule est elle démontrable avec les règles de démonstration usuelles ?

(3) *Question 2.* Faites la preuve de la formule $((A \lor B) \land \neg B) \Rightarrow A$ en utilisant les règles usuelles données à la fin du sujet.

Note : vous devrez utilisez la règle du "raisonnement par l'absurde".

(3) *Question 3.* Appliquez, en détaillant ce que vous faites, l'algorithme DPLL vu en cours en utilisant uniquement la simplification des clauses unitaires sur la formule en FNC suivante.

$$(x_3 \lor x_1) \land (x_2 \lor x_1) \land (\neg x_3 \lor x_4) \land (\neg x_2 \lor \neg x_5) \land (\neg x_5 \lor \neg x_4) \land (x_5 \lor \neg x_4)$$

Si aucune simplification n'est possible, prenez le premier littéral de la première clause, et rendez-le vrai. (Autrement dit, si le premier littéral est $\neg x_2$, commencez par utiliser $x_2 =$ `false`.)

(1) *Question 4.* Si $(l_1 \lor l_2 \lor l_3 \lor l_4)$ est une clause de 4 littéraux dans une formule en forme normale conjonctive, on peut la remplacer par 2 clauses de 3 littéraux en introduisant une *nouvelle* variable z :

$$(l_1 \lor l_2 \lor z) \land (\neg z \lor l_3 \lor l_4)$$

Expliquez pourquoi cette transformation ne modifie pas la satisfiabilité de la formule initiale.

Partie 2 : logique du premier ordre

(2) *Question 1.* Un tableau est dit “unimodal” s’il commence par des éléments triés dans l’ordre croissant, suivis d’éléments triés dans l’ordre décroissant.

Par exemple, `[1,2,3,3,4,5,5,3,2,0]` est unimodal, mais `[1,2,1,2]` ne l’est pas. Chacune des parties (croissante ou décroissante) peut être vide. Ainsi, le tableau vide ou les tableaux triés sont unimodaux.

Donnez une formule $F(\texttt{T})$ qui sera vraie exactement lorsque T est un tableau unimodal.

Notes :
- `T` est une variable libre
- vous pouvez utiliser l’accès aux éléments d’un tableau “`T[j]`”, la fonction “`len`”, les relations “`==`”, “`<`”, “`>`”, “`<=`” et “`>=`” et les opérations arithmétiques usuelles.

(2) *Question 2.* La tactique “`induction n`” de Coq permet de faire une preuve par induction sur la variable `n`. Pour les entiers :
- on doit prouver le cas de base ($\texttt{n} = 0$)
- on doit prouver l’étape d’induction : si le but est vrai pour `n`, alors il est vrai pour `n+1`.

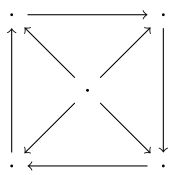
Donnez une règle que l’on pourrait ajouter à celles données en fin de sujet pour cette méthode de démonstration :

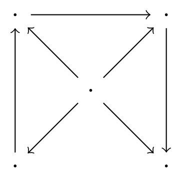
$$\frac{???\quad ???\quad ???}{\Gamma \ \vdash \ F(n)}\ (\text{induction})$$

(2) *Question 3.* On s’intéresse au langage contenant une unique relation binaire R que l’on interprète par “$R(x, y)$ signifie qu’il y a une flèche de x vers y”.

Donnez une formule qui sera vraie dans le premier graphe, et fausse dans le second.

N’oubliez pas de justifier !





Partie 3 : Prolog et unification

(2) *Question 1.* Détaillez l’algorithme d’unification vu en cours sur les termes suivants :
- `f(Y, g(Z))` et `f(g(X), Y)` ;
- `f(X, f(X,Y,Z), g(Y))` et `f(g(Z), f(X, Z, Z), X)`.

(2) *Question 2.* Écrivez en Prolog, un prédicat ternaire `supprime/3`.

On veut que `supprime(X, L1, L2)` soit vrai lorsque la liste `L2` est égale à la liste `L1` dans laquelle on a supprimé toutes les occurences de `X`.

On aura par exemple `supprime(3, [1,3,2,4,3], [1,2,4])`.

Remarques :
- le prédicat `supprime/3` prédicat est récursif,
- la syntaxe `[E | L]` de Prolog désigne une liste qui commence par l’élément `E`, et où `L` contient tous les éléments suivants (éventuellement aucun).

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle.

$$\frac{\Gamma; F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G} (\Rightarrow_c) \qquad \frac{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash F}{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash G} (\Rightarrow_h) \text{ / (modus ponens)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2} (\wedge_c) \qquad \frac{\Gamma; F_1; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \wedge F_2 \vdash G} (\wedge_h)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2} (\vee_{c,i}) \qquad \frac{\Gamma; F_1 \vdash G \qquad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \vee F_2 \vdash G} (\vee_h) \text{ / (raisonnement par cas)}$$

$$\frac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F} (\neg_c) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot} \text{(contradiction)}$$

$$\frac{}{\Gamma; F \vdash F} \text{(axiome)} \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F} \text{(raisonnement par l'absurde)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash G \qquad \Gamma; G \vdash F}{\Gamma \vdash F} \text{(résultat intermédiaire)}$$

Et voici les règles de la déduction naturelle pour la logique du premier ordre.

$$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)} (\forall_c)^* \qquad \frac{\Gamma; \forall x, F(x); F(u) \vdash C}{\Gamma; \forall x, F(x) \vdash C} (\forall_h) \text{ / (spécialisation)}^*$$

$$\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)} (\exists_c) \qquad \frac{\Gamma; F(x_0) \vdash C}{\Gamma; \exists x, F(x) \vdash C} (\exists_h) \text{ / (utilisation du } \exists)^*$$

avec

- dans la règle $(\forall_c)$, x est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans les règle (spécialisation) et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire,
- dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent.*