INFO501 : logique (et informatique)
TD : logique propositionnelle

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : formules

Question 1. Donnez une formule propositionnelle (en introduisant des formules atomiques adéquates) pour les phrases suivantes.
- "S'il fait beau, je vais travailler en vélo, mais quand je suis en retard, je prend le bus."
- "Si tu ranges ta chambre, tu pourras aller au cinéma."
- "N'oublie pas ton écharpe, il fait froid."
- "n est un multiple de 12 dès que n est un multiple de 2 et de 3."
- "Si n est un nombre premier, alors il est impair, sauf si c'est 2."

Question 2. Donnez le connecteur principal des formules suivantes, puis donnez l'arbre correspondant à la formule.

$$A \land (B \Rightarrow C) \qquad \neg(A \land (B \lor \neg C)) \qquad A \lor B \lor C \lor D \qquad A \Rightarrow B \Rightarrow C$$
$$A \land B \lor C \land D \qquad \neg\neg\neg(B \Leftrightarrow C) \qquad \neg A \land B \Rightarrow C \qquad A \Rightarrow B \lor \neg(C \land D \Rightarrow E)$$

Exercice 2 : connecteurs logiques et tables de vérité

Question 1. Retrouvez la table de vérité du connecteur $\Rightarrow$ en étudiant les différents cas correspondants à la formule (vraie) *"Si n est un multiple de 4, alors n est pair."*.

Vérifiez que cette table de vérité est la même que celle de $\neg A \lor B$.

Question 2. Calculez les tables de vérité pour vérifier que les 2 formules suivantes sont équivalentes :
- $A \lor (B \land C)$,
- $(A \lor B) \land (A \lor C)$.

Question 3. Donnez une formule équivalente à $A \land B$ en n'utilisant que la disjonction ($\lor$) et la négation ($\neg$).

Question 4. En utilisant les équivalences logique standard (lois de de Morgan, distributivité, etc.), montrez que les 2 formules suivantes sont équivalentes :

$$(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) \qquad \text{et} \qquad (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$$

Question 5. Le symbole de Sheffer ($\uparrow$) est un connecteur binaire avec la table de vérité suivante :

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

Il agit comme la négation d'une conjonction : "pas les deux".

À quoi correspond $A \uparrow A$?

Montrez que l'on peut redéfinir tous les opérateurs usuels uniquement à partir de $\uparrow$.

[!] *Question 6.* Combien de connecteurs binaires existe t'il ? Énumérez les et donnez leurs un nom. Cherchez combien ont la propriété de complétude fonctionnelle (comme "$\uparrow$"), à savoir de pouvoir redefinir tous les connecteurs usuels, et donc toutes les fonctions booléennes.

Question 7. Les formules suivantes sont elles des tautologies ? Sont elles satisfiables ?

$$A \Rightarrow B \Rightarrow A \qquad\qquad (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$
$$(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B) \qquad\qquad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$$

Question 8. Que pensez-vous de l'algorithme "bête" qui calcule la table de vérité d'une formule pour vérifier si elle est satisfiable ?

À partir de combien de variables est-ce que cet algorithme risque de ne plus fonctionner ?

Question 9. Justifiez l'assertion : $\neg F$ *est une tautologie si et seulement si* F *n'est pas satisfiable.*

Exercice 3 : satisfiabilité, résolution et algorithme DPLL

Question 1. Donnez les tables de vérité puis une formule en FNC pour les formules
- $S \Leftrightarrow (A \oplus B \oplus C)$,
- $C' \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\big)$.

Question 2. Pour chacune des formules suivantes, donnez une formule en FNC équivalente sans passer par les tables de vérité.

$$A \wedge B \qquad A \vee B \qquad A \Leftrightarrow B \qquad (A \wedge B) \vee \neg(C \Rightarrow D)$$

Question 3. Décrivez une procédure (récursive) qui permet de transformer n'importe quelle formule en formule en FNC logiquement équivalente.

Question 4. Utilisez les lois de distribution pour transformer la formule suivante en FNC.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee \cdots \vee (A_k \wedge B_k)$$

Estimez la taille de la formule obtenue

Indice : commencez avec $k = 2$ et $k = 3$.

[!] *Question 5.* Vérifiez que la formule

$$(Z_1 \vee \cdots \vee Z_k) \wedge (\neg Z_1 \vee F_1) \wedge (\neg Z_1 \vee G_1) \wedge \cdots (\neg Z_k \vee F_k) \wedge (\neg Z_k \vee G_k)$$

est equisatisfiable avec

$$(F_1 \wedge G_1) \vee \cdots \vee (F_k \wedge G_k)$$

Indice : chaque variable Z_i "représente" la clause $(F_i \vee G_i)$.

Déduisez en une formule de taille raisonnable, equisatisfiable à la formule de la question précédente.

[!] *Question 6.* On s'intéresse à la transformation qui découpe une clause en 2 de la manière suivante :

$$F = (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee \ldots \vee l_n) \wedge \cdots \quad \mapsto \quad F' = (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee x) \wedge (\neg x \vee \ldots \vee l_n) \wedge \cdots$$

où x est une nouvelle variable propositionnelle.
- Les deux formules sont elles équivalentes ?
- Les deux formules sont elles équi-satisfiables ?
- En appliquant cette transformation plusieurs fois, peut-on réduire toutes les clauses à 4 litteraux ? À 3 littéraux ? À 2 litteraux ?

Question 7. Faites tourner l'algorithme naïf pour SAT sur les formules suivantes :
- $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
- $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1)$
- $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$

Cet algorithme instancie les variables dans l'ordre (x_1, puis x_2, etc.) et essaie en premier la valeur 1.

[!] *Question 8.* Donnez un exemple de formule où l'algorithme naïf est exponentiel car seule la dernière solution testée est valide.

Question 9. Appliquez les règles de propagation des clauses unitaires et de simplification des littéraux purs sur les formules suivantes.

Le résultat est il satisfiable ?
- $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$
- $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$
- $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$

Question 10. En pratique, on n'implémente pas la simplification des clauses pures car cela est trop lent.

Faites tournez l'algorithme DPLL *en utilisant uniquement la simplification des clauses unitaires* sur les formules de la question 7.

Exercice 4 : déduction naturelle

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle.

$$\frac{\Gamma; F \ \vdash \ G}{\Gamma \ \vdash \ F \Rightarrow G}\ (\Rightarrow_c) \qquad\qquad \frac{\Gamma; F \Rightarrow G \ \vdash \ F}{\Gamma; F \Rightarrow G \ \vdash \ G}\ (\Rightarrow_h \dagger)\ /\ (\text{modus ponens}\dagger)$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ F_1 \qquad \Gamma \ \vdash \ F_2}{\Gamma \ \vdash \ F_1 \wedge F_2}\ (\wedge_c) \qquad\qquad \frac{\Gamma; F_1; F_2 \ \vdash \ G}{\Gamma; F_1 \wedge F_2 \ \vdash \ G}\ (\wedge_h)$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ F_i}{\Gamma \ \vdash \ F_1 \vee F_2}\ (\vee_{c,i}\dagger) \qquad\qquad \frac{????????????}{\Gamma; F_1 \vee F_2 \ \vdash \ G}\ (\vee_h)\ /\ (\text{raisonnement par cas})$$

$$\frac{\Gamma; F \ \vdash \ \bot}{\Gamma \ \vdash \ \neg F}\ (\neg_c) \qquad\qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \neg F \qquad \Gamma \ \vdash \ F}{\Gamma \ \vdash \ \bot}\ (\text{contradiction}\dagger)$$

$$\frac{}{\Gamma; F \ \vdash \ F}\ (\text{axiome}) \qquad\qquad \frac{\Gamma; \neg F \ \vdash \ \bot}{\Gamma \ \vdash \ F}\ (\text{raisonnement par l'absurde})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ G \qquad \Gamma; G \ \vdash \ F}{\Gamma \ \vdash \ F}\ (\text{résultat intermédiaire}\dagger)$$

Question 1. Rappelez le sens "intuitif" de la notation "$H_1; H_2; \ldots, H_k \ \vdash \ F$" et d'une règle de la forme

$$\frac{\Delta_1 \ \vdash \ G_1 \qquad \Delta_2 \ \vdash \ G_2 \qquad \ldots}{\Gamma \ \vdash \ F}$$

Question 2. Complétez la règle manquante et justifiez son nom "raisonnement par cas".

$$\frac{????????????}{\Gamma; F_1 \vee F_2 \ \vdash \ G}\ (\vee_h)\ /\ (\text{raisonnement par cas})$$

Question 3. Quelles sont les règles qui permettent de démontrer l'absurde ("$\bot$"), c'est à dire d'obtenir un séquent de la forme $\Gamma \ \vdash \ \bot$?

Question 4. Démontrez la loi de distributivité $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Démontrez ensuite la réciproque $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow \big(A \vee (B \wedge C)\big)$.

Question 5. Démontrez la loi de "contraposition" : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Essayez de démontrez sa réciproque : $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$. (Il faudra utiliser un raisonnement par l'absurde.)

Question 6. Démontrez l'équivalence $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ en montrant les 2 implications.
Indice : il faudra utiliser un raisonement par l'absurde pour l'implication $\neg\neg A \Rightarrow A$...

[!] *Question 7.* Démontrez la tautologie $A \vee \neg A$.
Indice : il faudra utiliser un raisonement par l'absurde...