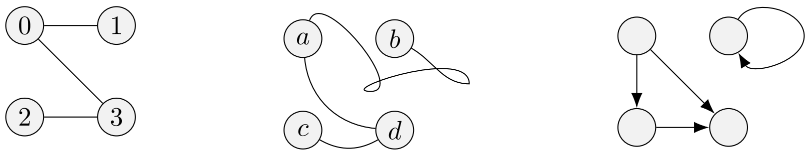
INFO601 : graphes et algorithmes
TD 1 : représentations des graphes, premiers algorithmes

Pierre Hyvernat, Gérald Cavallini
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Exercice 1 : Représentation des graphes

Question 1. Donnez la représentation des graphes suivants sous forme de listes d'adjacence et de matrices d'adjacence. La représentation est elle unique ?



Question 2. Dessinez les graphes donnés par la matrice d'adjacence M et celui donné par les listes d'adjacence A. La représentation graphique est elle unique ?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} [1,3,2] \\ [3,4,2] \\ [3,4] \\ [] \\ [0,3] \end{bmatrix}$$

Question 3.
- Donnez une opération naturelle qui est plus rapide avec les matrices d'adjacence qu'avec les listes d'adjacence ; et inversement.
- Quelle représentation utilise plus de mémoire ? Donnez sa taille avec un "Θ".

Question 4. Pour représenter un graphe non-orienté avec des listes d'adjacences, on peut
- imposer que lorsque x est dans $A[y]$, alors est y est dans $A[x]$,
- ou bien pour vérifier que x est voisin de y, on teste "si x est dans $A[y]$ ou y est dans $A[x]$".

Quels sont les avantages / inconvénients de ces manières de représenter les graphes non-orientés ?

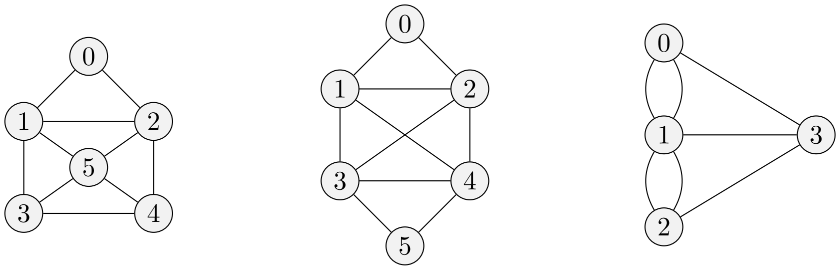
Question 5.
- Si un graphe a n sommets, combien peut il avoir d'arêtes au maximum ?
- Si un graphe a m arêtes, combien peut il avoir de sommets au minimum ? ?
- La relation d'adjacence donnée par les pixels voisins d'une image forme un graphe où chaque sommet a au plus 4 voisin. Donnez un équivalent asymptotique (O, Ω ou Θ) du nombre d'arêtes en fonction du nombre de sommets dans ce cas.

Exercice 2 : Formule d'Euler pour les forêts

Question 1.
- Rappelez la définition d'un *arbre*.
- Rappelez la formule reliant le nombre de sommets et le nombre d'arêtes dans un arbre.
- Donnez un exemple de graphe vérifiant la formule précédente, mais qui n'est pas un arbre.
- Une *forêt* est ... un ensemble d'arbres. Donnez une formule reliant le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre d'arbres pour une forêt.

Exercice 3 : chemins eulérien

Question 1. Un chemin eulérien dans un graphe non orienté est un chemin qui passe par toutes les arêtes *exactement* une fois. Adaptez le critère vu en cours pour les graphes orientés et donnez un chemin eulérien pour les graphes suivants (ou expliquez pourquoi il n'y en a pas).



Question 2. L'algorithme de Fleury permet de trouver un chemin eulérien quand il existe :

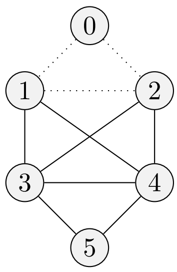
1- on part d'un sommet de degré impair (ou d'un sommet arbitraire lorsqu'il n'y en a pas) ;
2- on avance en supprimant les les arête, *en choisissant si possible une arête qui ne déconnecte pas le graphe restant.*

- Appliquez cet algorithme sur les exemples précédents.
- Quelle est dans cet algorithme, la partie la plus complexe à implémenter ?

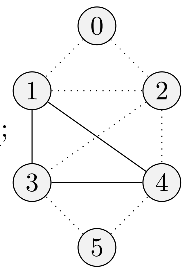
Question 3. Avec les structures de données adéquates, l'algorithme de recherche de Hierholzer vu en cours peut fonctionner en $O(n+m)$. On peut l'adapter au cas non-orienté : on construit un chemin maximal au départ du premier sommet (0 par exemple) *en supprimant les arêtes empruntées* au fur et à mesure, et on recommence en décalant le chemin.

Dans le deuxième graphe de la question précédente, on pourrait obtenir $0, 1, 2, 0$ à la première étape. Comme il n'y a plus d'arête au départ de 0, on décale le chemin pour obtenir $2, 0, 1, 2$, et on recommence en construisant un chemin maximal à partir de 2

$0, \underline{1, 2, 0}$;



$2, 0, 1, 2, \underline{3, 5, 4, 2}$;



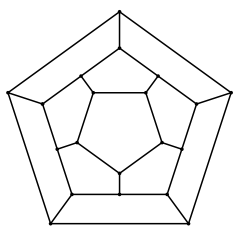
etc.

- Quelle serait l'étape suivante ?
- Comment peut-on implémenter cet algorithme dans le cas non-orienté ?

Exercice 4 : chemin Hamiltonien

Question 1. Un circuit *hamiltonien* est un chemin qui passe *exactement une fois* par tous les sommets d'un graphe *et qui revient à son point de départ.*

- Les graphes de l'exercice précédent ont ils des circuits hamiltoniens ?
- Et pour le graphe suivant ?



- Pouvez vous donner un algorithme pour chercher un circuit hamiltonien ?