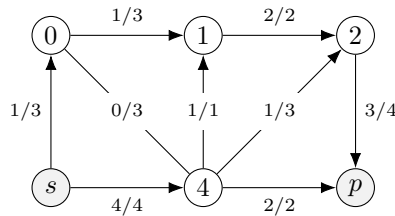


**INFO601 : algorithmique et graphes**  
**TD 5 : flot maximal**

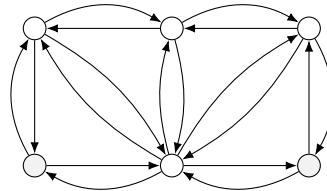
Pierre Hyvernats, Gérald Cavallini  
 Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie  
 bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22  
 email : Pierre.Hyvernats@univ-smb.fr  
 www : <http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernats/>

**Exercice 1 : Exemples**

Question 1. On considère un réseau non-orienté avec le flot suivant :



- Vérifiez attentivement qu'il s'agit effectivement d'un flot.
- Qu'elle est sa valeur ?
- Construisez le graphe des flots résiduels en donnant la valeur de *toutes* les arêtes :



Question 2. En utilisant le réseau et le flot de la question précédente, cherchez un chemin augmentant pour mettre le flot à jour. Continuez à appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal. Quelle est sa valeur ?

**Exercice 2 : Représentation**

Question 1.

On suppose que le réseau initial et le flot sont donnés par des listes d'adjacence  $C$  et  $F$ . Écrivez les fonctions `incr_flow(F, s1, s2, f)` et `get_residual_flow(C, F, s1, s2)` qui

- incrémente le flot de l'arête  $s1 \rightarrow s2$  de la valeur  $f$ .
- calcule le flot résiduel de l'arête  $s1 \rightarrow s2$  (et renvoie 0 s'il n'y a pas d'arête de  $s1$  à  $s2$ ).

Question 2. Pour éviter de parcourir les listes d'adjacence pour la mise à jours, on modifie les listes d'adjacence du flot  $F$  de la manière suivante.  $F[s]$  contient la liste des `arc` sortants de  $s$ , où un `arc` "a" contient :

- `a.target` : le but de l'arc,
- `a.capacity` : la capacité de cet arc,
- `a.flow` : la valeur du flot sur cet arc,
- `a.opposite` : référence à l'arc opposé. (Par exemple, l'indice de l'arc opposé (de `a.target` vers  $s$ ) dans la liste  $F[a.target]$ .)

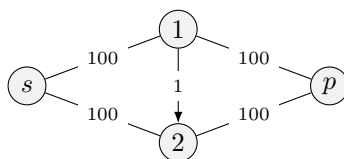
Récrivez les fonctions `incr_flow` et `get_residual_flow`, en prenant un `arc` en argument.

*Question 3.* Pour accéder aux arcs d'un chemin augmentant, il faut modifier le parcours pour qu'il renvoie un tableau **Pred** avec des **arc** plutôt que de simples prédécesseurs. Écrivez le parcours (en largeur) qui cherche un chemin dans le graphe des flots résiduels et renvoie le tableau **Pred** correspondant.

*Question 4.* Comment pouvez vous retrouver le chemin de la source au puit à partir de **Pred**, le tableau d'**arc** calculé par un parcours ?

**Exercice 3 : Bien choisir les chemins augmentants**

*Question 1.* Donnez un flot maximal (et sa valeur) pour le réseau suivant.



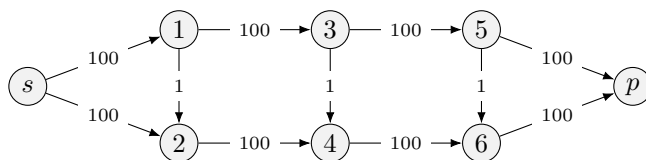
(Remarque : l'arête  $1 \rightarrow 2$  est orientée. La capacité  $2 \rightarrow 1$  vaut 0.)

*Question 2.* Montrez que l'algorithme de Edmonds-Karp (algorithme de Ford-Fulkerson avec un parcours en largeur) termine en 2 étapes sur ce flot maximal.

*Question 3.* Combien de chemins augmentants va t'on trouver avec un parcours en profondeur, si on suppose que les voisins d'un sommet sont triés par ordre croissant (avec  $s < 1 < 2 < p$ ) ?

*Question 4.* Donnez une suite de chemins augmentants encore plus "malchanceuse" que celle donnée par le parcours en profondeur.

*Question 5.* Répondez aux questions 1 et 2 pour le réseau



**Exercice 4 : compréhension**

*Question 1.* Donnez un exemple de réseau et de flot maximal avec un flot strictement positif entrant sur la source (un "feedback").

*Question 2.* Est-il possible de trouver un réseau où tous les flots maximaux ont un flot strictement positif entrant sur la source ?

*Question 3.* Comment peut on adapter le problème du flot maximum lorsqu'il y a plusieurs sources et/ou plusieurs puits ?