

INFO501 : logique (et informatique) Examen

Pierre Hyvernât
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : Pierre.Hyvernât@univ-smb.fr
www : <http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernât/>

Durée : 1h30.

Documents et calculatrices interdits.

Un barème provisoire est donné dans la marge.

1 point négatif sera réservé à la présentation de vos réponses...

Partie 1 : calcul propositionnel

(3) Question 1.

- Rappelez la table de vérité de l'implication " $\Rightarrow$ ".

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

- La formule $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ est-elle une tautologie ?
- Cette même formule est-elle démontrable avec les règles de démonstration usuelles ?

(3) Question 2. Faites la preuve de la formule $((A \vee B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$ en utilisant les règles usuelles données à la fin du sujet.

Note : vous devrez utiliser la règle du "raisonnement par l'absurde".

(3) Question 3. Appliquez, en détaillant ce que vous faites, l'algorithme DPLL vu en cours en utilisant uniquement la simplification des clauses unitaires sur la formule en FNC suivante.

$$(x_3 \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_5 \vee \neg x_4) \wedge (x_5 \vee \neg x_4)$$

Si aucune simplification n'est possible, prenez le premier littéral de la première clause, et rendez-le vrai. (Autrement dit, si le premier littéral est $\neg x_2$, commencez par utiliser $x_2 = \text{false}$.)

(1) Question 4. Si $(l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4)$ est une clause de 4 littéraux dans une formule en forme normale conjonctive, on peut la remplacer par 2 clauses de 3 littéraux en introduisant une *nouvelle* variable z :

$$(l_1 \vee l_2 \vee z) \wedge (\neg z \vee l_3 \vee l_4)$$

Expliquez pourquoi cette transformation ne modifie pas la satisfiabilité de la formule initiale.

Partie 2 : logique du premier ordre

- (2) *Question 1.* Un tableau est dit “unimodal” s’il commence par des éléments triés dans l’ordre croissant, suivis d’éléments triés dans l’ordre décroissant.

Par exemple, $[1,2,3,3,4,5,5,3,2,0]$ est unimodal, mais $[1,2,1,2]$ ne l’est pas. Chacune des parties (croissante ou décroissante) peut être vide. Ainsi, le tableau vide ou les tableaux triés sont unimodaux.

Donnez une formule $F(T)$ qui sera vraie exactement lorsque T est un tableau unimodal.

Notes :

- T est une variable libre
- vous pouvez utiliser l’accès aux éléments d’un tableau “ $T[j]$ ”, la fonction “**len**”, les relations “ $=$ ”, “ $<$ ”, “ $>$ ”, “ $<=$ ” et “ $>=$ ” et les opérations arithmétiques usuelles.

- (2) *Question 2.* La tactique “**induction n**” de Coq permet de faire une preuve par induction sur la variable n . Pour les entiers :

- on doit prouver le cas de base ($n = 0$)
- on doit prouver l’étape d’induction : si le but est vrai pour n , alors il est vrai pour $n+1$.

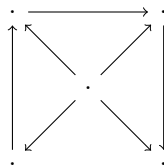
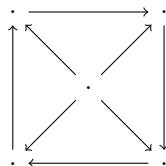
Donnez une règle que l’on pourrait ajouter à celles données en fin de sujet pour cette méthode de démonstration :

$$\frac{??? \quad ??? \quad ???}{\Gamma \vdash F(n)} \text{ (induction)}$$

- (2) *Question 3.* On s’intéresse au langage contenant une unique relation binaire R que l’on interprète par “ $R(x,y)$ signifie qu’il y a une flèche de x vers y ”.

Donnez une formule qui sera vraie dans le premier graphe, et fausse dans le second.

N’oubliez pas de justifier !



Partie 3 : Prolog et unification

- (2) *Question 1.* Détaillez l’algorithme d’unification vu en cours sur les termes suivants :

- $f(Y, g(Z))$ et $f(g(X), Y)$;
- $f(X, f(X,Y,Z), g(Y))$ et $f(g(Z), f(X, Z, Z), X)$.

- (2) *Question 2.* Écrivez en Prolog, un prédicat ternaire **supprime/3**.

On veut que **supprime(X, L1, L2)** soit vrai lorsque la liste $L2$ est égale à la liste $L1$ dans laquelle on a supprimé toutes les occurrences de X .

On aura par exemple **supprime(3, [1,3,2,4,3], [1,2,4])**.

Remarques :

- le prédicat **supprime/3** est récursif,
- la syntaxe $[E \mid L]$ de Prolog désigne une liste qui commence par l’élément E , et où L contient tous les éléments suivants (éventuellement aucun).

Rappels : voici les règles de la déduction naturelle pour la logique propositionnelle.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma; F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G} (\Rightarrow_c) \qquad \frac{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash F}{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash G} (\Rightarrow_h) / (\text{modus ponens}) \\
\\
\frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2} (\wedge_c) \qquad \frac{\Gamma; F_1; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \wedge F_2 \vdash G} (\wedge_h) \\
\\
\frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2} (\vee_{c,i}) \qquad \frac{\Gamma; F_1 \vdash G \quad \Gamma; F_2 \vdash G}{\Gamma; F_1 \vee F_2 \vdash G} (\vee_h) / (\text{raisonnement par cas}) \\
\\
\frac{\Gamma; F \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg F} (\neg_c) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \perp} (\text{contradiction}) \\
\\
\frac{}{\Gamma; F \vdash F} (\text{axiome}) \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \perp}{\Gamma \vdash F} (\text{raisonnement par l'absurde}) \\
\\
\frac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma; G \vdash F}{\Gamma \vdash F} (\text{résultat intermédiaire})
\end{array}$$

Et voici les règles de la déduction naturelle pour la logique du premier ordre.

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)} (\forall_c)^* \qquad \frac{\Gamma; \forall x, F(x); F(u) \vdash C}{\Gamma; \forall x, F(x) \vdash C} (\forall_h) / (\text{spécialisation})^* \\
\\
\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)} (\exists_c) \qquad \frac{\Gamma; F(x_0) \vdash C}{\Gamma; \exists x, F(x) \vdash C} (\exists_h) / (\text{utilisation du } \exists)^*
\end{array}$$

avec

- dans la règle $(\forall_c)$, x est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
 - dans les règles (spécialisation) et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire,
 - dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*.
-