INFO501 : logique (et informatique)
Déduction naturelle

Pierre Hyvernat
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
email : `Pierre.Hyvernat@univ-smb.fr`
www : `http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat/`

Partie 1 : logique du premier ordre

$$\frac{\Gamma; F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow_c)^* \qquad \frac{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash F}{\Gamma; F \Rightarrow G \vdash G}\,(\Rightarrow_h)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 \qquad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \land F_2}\,(\land_c)^* \qquad \frac{\Gamma; H_1; H_2 \vdash F}{\Gamma; H_1 \land H_2 \vdash F}\,(\land_h)^*$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \lor G}\,(\lor_c) \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \lor G}\,(\lor_c) \qquad \frac{\Gamma; H_1 \vdash F \qquad \Gamma; H_2 \vdash F}{\Gamma; H_1 \lor H_2 \vdash F}\,(\lor_h, \text{raisonnement par cas})^*$$

$$\frac{\Gamma; F \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg_c)^* \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg F \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash \bot}\,(\text{contradiction})$$

$$\frac{}{\Gamma; F \vdash F}\,(\text{axiome})^{**} \qquad \frac{\Gamma; \neg F \vdash \bot}{\Gamma \vdash F}\,(\text{raisonnement par l'absurde})$$

$$\frac{\Gamma \vdash H \qquad \Gamma; H \vdash F}{\Gamma \vdash F}\,(\text{résultat intermédiaire})$$

Partie 2 : stratégie de recherche de preuve

- (**) Si le séquent à prouver est un axiome, on utilise la règle axiome !
- (*) Si le connecteur principal de la formule conclusion est $\Rightarrow$, $\land$, ou $\neg$, on applique la règle correspondante $(\Rightarrow_c)$, $(\land_c)$ ou $(\neg_c)$ pour décomposer la formule conclusion.
- Si une hypothèse a pour constructeur principal $\land$ ou $\lor$, on applique la règle correspondante $(\land_h)$ ou $(\lor_h)$ pour décomposer l'hypothèse.

Partie 3 : exemple

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \lor B); A \vdash \neg(A \lor B)}\,(\text{axiome}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(A \lor B); A \vdash A}\,(\text{axiome})}{\neg(A \lor B); A \vdash A \lor B}\,(\lor_{c,1})}{\neg(A \lor B); A \vdash \bot}\,(\text{contradiction})}{\neg(A \lor B) \vdash \neg A}\,(\neg_c) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ [\text{idem}]\end{array}}{\neg(A \lor B) \vdash \neg B}}{\dfrac{\neg(A \lor B) \vdash \neg A \land \neg B}{\vdash \neg(A \lor B) \Rightarrow (\neg A \land \neg B)}\,(\Rightarrow_c)}\,(\land_c)$$

Partie 4 : logique du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash \forall x, F(x)}\,(\forall_c)^* \qquad \frac{\Gamma; \forall x, H(x); H(u) \vdash F}{\Gamma; \forall x, H(x) \vdash F}\,(\forall_h, \text{spécialisation})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F(u)}{\Gamma \vdash \exists x, F(x)}\,(\exists_c) \qquad \frac{\Gamma; H(x_0) \vdash F}{\Gamma; \exists x, H(x) \vdash F}\,(\exists_h, \text{utilisation du } \exists)^*$$

avec

- dans la règle $(\forall_c)$, x est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent*,
- dans les règle (spécialisation) et $(\exists_c)$, u est un terme arbitraire,
- dans la règle (utilisation du $\exists$), x_0 est une variable *qui n'est pas libre dans le séquent.*

Remarque : les règles avec une étoile “*” sont celle que l'on peut toujours appliquer sans risque de rendre la preuve impossible.

Partie 5 : stratégie de recherche de preuve

- Si la conclusion a pour constructeur principal $\forall$, on applique la règle correspondante ($\forall_c$) ;
- si une hypothèse a pour constructeur principal $\exists$, on applique la règle correspondante ($\exists_h$) pour simplifier l'hypothèse.