

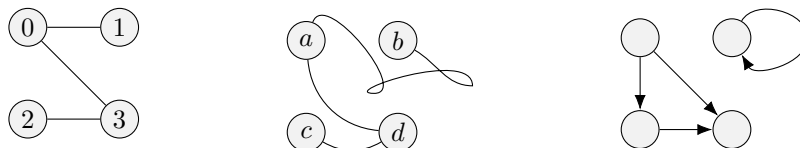
INFO601 : graphes et algorithmes

TD 1 : représentations des graphes, premiers algorithmes

Pierre Hyvernât, Gérard Cavallini
 Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie
 bâtiment Chablais, bureau 17, poste : 94 22
 email : Pierre.Hyvernât@univ-smb.fr
 www : <http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernât/>

Exercice 1 : Représentation des graphes

Question 1. Donnez la représentation des graphes suivants sous forme de listes d'adjacence et de matrices d'adjacence. La représentation est elle unique ?



Question 2. Dessinez les graphes donnés par la matrice d'adjacence M et celui donné par les listes d'adjacence A . La représentation graphique est elle unique ?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} [1, 3, 2] \\ [3, 4, 2] \\ [3, 4] \\ \emptyset \\ [0, 3] \end{bmatrix}$$

Question 3.

- Donnez une opération naturelle qui est plus rapide avec les matrices d'adjacence qu'avec les listes d'adjacence ; et inversement.
- Quelle représentation utilise plus de mémoire ? Donnez sa taille avec un “ Θ ”.

Question 4. Pour représenter un graphe non-orienté avec des listes d'adjacences, on peut

- imposer que lorsque x est dans $A[y]$, alors y est dans $A[x]$,
- ou bien pour vérifier que x est voisin de y , on teste “si x est dans $A[y]$ ou y est dans $A[x]$ ”.

Quels sont les avantages / inconvénients de ces manières de représenter les graphes non-orientés ?

Question 5.

- Si un graphe a n sommets, combien peut il avoir d'arêtes au maximum ?
- Si un graphe a m arêtes, combien peut il avoir de sommets au minimum ? ?
- La relation d'adjacence donnée par les pixels voisins d'une image forme un graphe où chaque sommet a au plus 4 voisins. Donnez un équivalent asymptotique (O , Ω ou Θ) du nombre d'arêtes en fonction du nombre de sommets dans ce cas.

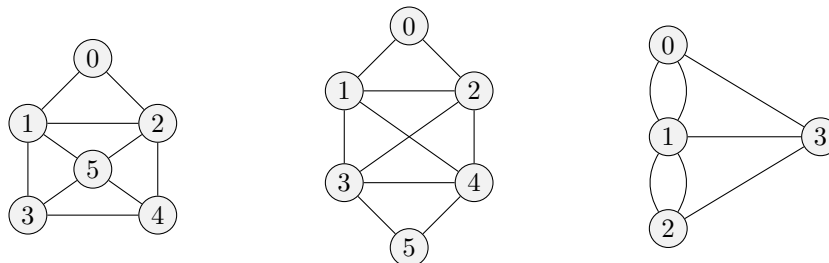
Exercice 2 : Formule d'Euler pour les forêts

Question 1.

- Rappelez la définition d'un *arbre*.
- Rappelez la formule reliant le nombre de sommets et le nombre d'arêtes dans un arbre.
- Donnez un exemple de graphe vérifiant la formule précédente, mais qui n'est pas un arbre.
- Une *forêt* est ... un ensemble d'arbres. Donnez une formule reliant le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre d'arbres pour une forêt.

Exercice 3 : chemins eulérien

Question 1. Un chemin eulérien dans un graphe non orienté est un chemin qui passe par toutes les arêtes *exactement* une fois. Adaptez le critère vu en cours pour les graphes orientés et donnez un chemin eulérien pour les graphes suivants (ou expliquez pourquoi il n'y en a pas).



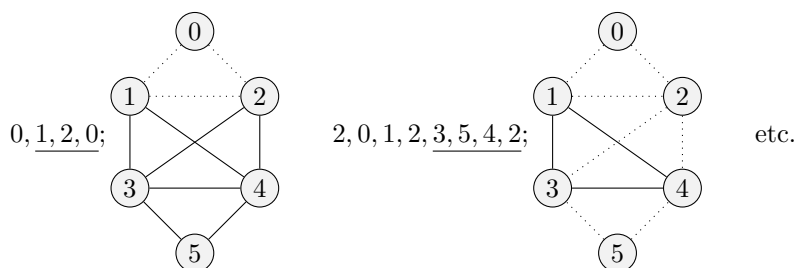
Question 2. L'algorithme de Fleury permet de trouver un chemin eulérien quand il existe :

- 1- on part d'un sommet de degré impair (ou d'un sommet arbitraire lorsqu'il n'y en a pas) ;
- 2- on avance en supprimant les arêtes, *en choisissant si possible une arête qui ne déconnecte pas le graphe restant*.

- Appliquez cet algorithme sur les exemples précédents.
- Quelle est dans cet algorithme, la partie la plus complexe à implémenter ?

Question 3. Avec les structures de données adéquates, l'algorithme de recherche de Hierholzer vu en cours peut fonctionner en $O(n + m)$. On peut l'adapter au cas non-orienté : on construit un chemin maximal au départ du premier sommet (0 par exemple) *en supprimant les arêtes empruntées* au fur et à mesure, et on recommence en décalant le chemin.

Dans le deuxième graphe de la question précédente, on pourrait obtenir 0, 1, 2, 0 à la première étape. Comme il n'y a plus d'arête au départ de 0, on décale le chemin pour obtenir 2, 0, 1, 2, et on recommence en construisant un chemin maximal à partir de 2

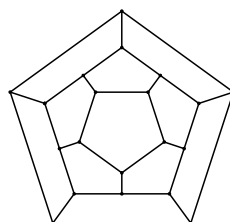


- Quelle serait l'étape suivante ?
- Comment peut-on implémenter cet algorithme dans le cas non-orienté ?

Exercice 4 : chemin Hamiltonien

Question 1. Un circuit *hamiltonien* est un chemin qui passe *exactement une fois* par tous les sommets d'un graphe *et qui revient à son point de départ*.

- Les graphes de l'exercice précédent ont-ils des circuits hamiltoniens ?
- Et pour le graphe suivant ?



- Pouvez-vous donner un algorithme pour chercher un circuit hamiltonien ?