# Introduction à la logique

## Licence 3

## Examen

9 janvier 2006

*Durée : 3 heures, documents non-autorisés.*

*Un barème approximatif est donné dans la marge. (Questions de cours : 4 points, question de philo : 3 points)*

> Les logiques ne sont pas mauvais pourtant. Ils ont changé la civilisation ; tout ça grâce à Carson Circuit. Et Joe aurait pu être un logique complètement normal. Mais quelque chose c'est mal passé sur la ligne de production : c'était quelque chose de si petit que les capteurs ne l'ont pas repéré, mais ça a fait de Joe un individu.
>
> Murray Leinster, « Un logique nommé Joe ».
>
> (Traduction approximative...)

---

**Exercice 1 :** Déduction naturelle.

*(2)* *Question 1 :* démontrez en déduction naturelle la règle dérivée suivante : $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}$ .

*(4)* *Question 2 :* démontrez en déduction naturelle les formules suivantes :
- $\big((A \to B) \to C\big) \to (B \to C)$ ;
- le paradoxe du buveur : $\exists x \,\big(B(x) \to \forall y\, B(y)\big)$.

Pour la deuxième preuve, vous avez droit aux règles dérivées et au tiers-exclu...

---

**Exercice 2 :** modèles et isomorphismes.

*(2)* *Question 1 :* rappelez la définition de *modèle* (ou *structure*) pour un langage $\mathcal{L}$.

*(1)* *Question 2 :* rappelez la définition de *morphisme* entre modèles d'un même langage.

*Question 3 :* on utilise le langage $\mathcal{L} = \{1, +, <\}$, où 1 est un symbole de constante, + est un symbole de fonction binaire et < un symbole de relation binaire.

On définit les modèles suivants :
- $\mathcal{M}_1$ avec $|\mathcal{M}_1| = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ et l'interprétation habituelle des symboles du langage ;
- $\mathcal{M}_2$ avec $|\mathcal{M}_2|$ = « ensemble des nombres pairs » = $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ et l'interprétation suivante :
  - + est interprété par l'addition,
  - $1_{\mathcal{M}_2} = 2$ ;
- $\mathcal{M}_3$ avec $|\mathcal{M}_3| = \mathbf{Q}^+$ = « ensemble des rationnels positifs ou nuls » et l'interprétation habituelle des symboles du langage.

*(2)* Montrez que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont isomorphes.

*(1)* Montrez que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}3$ ne sont pas isomorphes.

*(1)* Que pouvez-vous en déduire sur les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_3$ ?

---

**Exercice 3 :** théorèmes.

*(1)* Rappelez la définition de *théorème*.

*(3)* Est-ce que les formules suivantes sont des théorèmes ? (N'oubliez pas de justifier vos réponses...)

- $A \wedge B \to B \wedge A$ ;
- $A \wedge \neg A$ ;
- $\forall x \, \exists y \, x < y$ (pour un langage avec un symbole de relation binaire).

*(1)* Donnez une deuxième justification pour la formule $A \wedge \neg A$.

---

*(3)* **Exercice 4 :** *à traiter sur une feuille séparée...*
*Sujet :* "Vous expliquerez quels liens peuvent être faits entre mathématiques et informatique."

*Consignes pour traiter le sujet :*
Vous avez une vingtaine de minutes. Il est préférable de faire un plan et de l'annoncer. Votre réponse doit faire environ une page. Pour une réponse qui a du sens, plus elle a de structure, plus vous vous rapprochez de la note maximale.

Les schémas et exemples sont les bienvenus lorsqu'ils servent à appuyer votre propos.

Vous prendrez soin de ne pas faire de confusion par exemple entre la démonstration mathématique et sa représentation en logique (par la notion de preuve de Déduction Naturelle). Donc, séparez précisément les notions.

---

**Exercice bonus :** construction de modèle.
Soit le langage avec un unique symbole de relation binaire noté $\leq$ ; soient les formules suivantes :

- $F_1 \equiv \forall x \; x \leq x$
- $F_2 \equiv \forall x \forall y \; (x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y$
- $F_3 \equiv \forall x \forall y \forall z \; (x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z$
- $F_4 \equiv \forall x \forall y \; (x \leq y \wedge x \neq y) \to \exists z \; (x \leq z \wedge z \leq y)$
- $F_5 \equiv \forall x \; \exists y \; y \leq x$
- $F_6 \equiv \forall x \; \exists y \; x \leq y$

*(1)* Donnez un modèle pour les théories suivantes :

- $T_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$ ;
- $T_2 = \{F_1, F_2, F_3, \neg F_4, \neg F_5, \neg F_6\}$.

*(1)* Expliquez pourquoi on ne peut pas trouver un modèle de la théorie suivante :

- $T_3 = T_1 \cup \big\{\exists x_1 \exists x_2 \, \forall x \; (x = x_1 \vee x = x_2)\big\}$.

---