# Introduction à la logique

## Examen

Jeudi 3 juin 2004

*Durée : 3 heures, documents non-autorisés.*

*Un barème approximatif est donné dans la marge.*

LE LOGICIEN
Voici donc un syllogisme exemplaire. Le chat a quatre pattes. Isodore et Fricot on chacun quatre pattes. Donc Isodore et Fricot sont des chats.

LE VIEUX MONSIEUR
Mon chien aussi a quatre pattes.

LE LOGICIEN
Alors, c'est un chat.

LE VIEUX MONSIEUR
Donc logiquement, mon chien serait un chat.

LE LOGICIEN
Logiquement, oui. Mais le contraire est aussi vrai.

Eugène Ionesco, « Rhinocéros », acte premier.

---

**Exercice 1 :** Déduction naturelle

*(2)* *Question 1 :* démontrez en déduction naturelle (sans raisonnement par l'absurde) la formule suivante : $\big(F \to (G \to H)\big) \leftrightarrow \big((F \wedge G) \to H\big)$.

*(2)* *Question 2 :* démontrez en déduction naturelle la formule $(\forall x\ F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\ F) \vee G$ sous l'hypothèse que $x$ n'est pas libre dans $G$. (Vous pourrez utiliser le tiers exclu « $\vdash G \vee \neg G$ » pour prouver la direction $\to$.)

*(1)* *Question 3 :* on ajoute une nouvelle règle à la déduction naturelle appelée « double négation » :

$$\frac{}{\Gamma, \neg\neg F \ \vdash \ F}\ \text{double négation}$$

Démontrer que cette règle est dérivable en déduction naturelle classique (avec raisonnement par l'absurde).

*(1)* *Question 4 :* montrer que la règle du raisonnement par l'absurde est une règle dérivée dans le système « déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde + règle de la double négation ».

*(1)* Qu'en déduisez-vous sur les deux règles « raisonnement par l'absurde » et « double négation » ?

---

**Exercice 2 :** valuations.

*(2)* *Question 1 :* soit $\mathcal{L} = \{e, \_^{-1}, \times\}$ le langage de la théorie des groupes ; soit $\mathcal{M}$ l'interprétation suivante :
- $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$ ;
- $e_{\mathcal{M}} = 1$ ;
- $x \times_{\mathcal{M}} y = x \times y$ (multiplication) ;
- $x^{-1_{\mathcal{M}}} = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donnez la valuation de la formule suivante : $\forall x\ x \times (x \times x^{-1}) = x$.

*(2)* *Question 2 :* rappelez les axiomes de la théorie des groupes (sous forme de formules closes).

*(1)* *Question 3 :* est-ce que cette structure satisfait les axiomes des groupes ?

---

**Exercice 3 :** théorèmes.
On se place dans un langage avec un seul symbole de relation unaire $P$.

*(2)* *Question 1 :* est-ce que la formule $\big(\forall x\, P(x)\big) \to \big(\exists x\, P(x)\big)$ est un théorème ? Justifiez.

*(2)* *Question 2 :* donnez une autre justification pour la question précédente.

---

**Exercice 4 :** modèles.
On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

*(2)* *Question 1 :* soit $\mathcal{L}$ le langage ne contenant qu'une relation binaire $R$. On définit deux structures pour $\mathcal{L}$ :
- $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$ et $R_{\mathcal{M}}$ est la relation $\leq$ ;
- $\mathcal{N}$ avec $|\mathcal{N}| = ]0,1[$ et $R_{\mathcal{N}}$ est la relation $\leq$.

Montrez que les deux structures sont isomorphes.

*(2)* *Question 2 :* on définit une nouvelle structure $\mathcal{S}$ pour ce langage :
- $|\mathcal{S}| = \mathbf{R}^+$ et $R_{\mathcal{S}}$ est la relation $\leq$.

Est-ce que cette structure est isomorphe à $\mathcal{M}$ ?

---

*(bonus)* **Exercice :** (**difficile**) on a vu en TD qu'il y avait une formule $F$ sur le langage $\{e, \times, \_^{-1}, S\}$ ($e$ symbole de constante, $\times$ et $\_^{-1}$ symboles de fonctions binaire et unaire et $S$ symbole de relation unaire) qui vérifie :
- « $F$ a un modèle fini de cardinal $n$ ssi $n$ est un nombre composé (non-premier) ».

La formule $F$ était « axiomes des groupes » + « $S$ est un sous-groupe non-trivial ». Le théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) permettait de vérifier que $F$ satisfaisait bien la propriété voulue.

Redonnez cette formule.

Peut-on en déduire une formule $G$ vérifiant :
- tout modèle fini de $F$ est de cardinal premier ?

---