# Introduction à la logique

## Examen
## Correction

Jeudi 3 juin 2004

---

**Exercice 1 :** Déduction naturelle

(2) *Question 1 :* démontrez en déduction naturelle (sans raisonnement par l'absurde) la formule suivante : $\big(F \to (G \to H)\big) \leftrightarrow \big((F \wedge G) \to H\big)$.

Direction $\to$ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F \to (G \to H)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F \wedge G$}
\RightLabel{$\wedge$ elim}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F$}
\LeftLabel{$\to$ elim}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash G \to H$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F \wedge G$}
\RightLabel{$\wedge$ elim}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash G$}
\RightLabel{$\to$ elim}
\BinaryInfC{$\Gamma \equiv F \to (G \to H), F \wedge G \vdash H$}
\RightLabel{$\to$ intro ($\times 2$)}
\UnaryInfC{$\vdash (F \to (G \to H)) \to ((F \wedge G) \to H)$}
\end{prooftree}
$$

Direction $\leftarrow$ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (F \wedge G) \to H$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash G$}
\RightLabel{$\wedge$ intro}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash F \wedge G$}
\RightLabel{$\to$ elim}
\BinaryInfC{$\Gamma \equiv (F \wedge G) \to H, F, G \vdash H$}
\RightLabel{$\to$ intro ($\times 3$)}
\UnaryInfC{$\vdash ((F \wedge G) \to H) \to (F \to (G \to H))$}
\end{prooftree}
$$

(2) *Question 2 :* démontrez en déduction naturelle la formule $(\forall x\ F \vee G) \leftrightarrow (\forall x\ F) \vee G$ sous l'hypothèse que $x$ n'est pas libre dans $G$.

Direction $\to$ :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{tiers exclu}
\UnaryInfC{$\vdash G \vee \neg G$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\forall x\, (F[x] \vee G), G \vdash G$}
\RightLabel{$\vee$ intro}
\UnaryInfC{$\forall x\, (F[x] \vee G), G \vdash (\forall x\, F[x]) \vee G$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x\, (F[x] \vee G)$}
\LeftLabel{$\forall$ elim}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash F[x] \vee G$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, F[x] \vdash F[x]$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash G$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash \neg G$}
\RightLabel{$\neg$ elim}
\BinaryInfC{$\Gamma, G \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot$ elim}
\UnaryInfC{$\Gamma, G \vdash F[x]$}
\RightLabel{$\vee$ elim}
\TrinaryInfC{$\Gamma \vdash F[x]$}
\RightLabel{$\forall$ intro}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x\, F[x]$}
\RightLabel{$\vee$ intro}
\UnaryInfC{$\Gamma \equiv \forall x\, (F[x] \vee G), \neg G \vdash (\forall x\, F[x]) \vee G$}
\RightLabel{$\vee$ elim}
\TrinaryInfC{$\forall x\, (F[x] \vee G) \vdash (\forall x\, F[x]) \vee G$}
\RightLabel{$\to$ intro}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x\, (F[x] \vee G) \to (\forall x\, F[x]) \vee G$}
\end{prooftree}
$$

Direction $\leftarrow$ :

$$\dfrac{\text{ax}\;\dfrac{}{(\forall x\,F[x]) \lor G \;\vdash\; (\forall x\,F[x]) \lor G} \qquad \forall\text{ intro}^1\;\dfrac{\lor\text{ intro}\;\dfrac{\forall\text{ elim}\;\dfrac{\text{ax}\;\dfrac{}{\Delta \;\vdash\; \forall x\,F[x]}}{\Delta \;\vdash\; F[x]}}{\Delta \;\vdash\; F[x] \lor G}}{\Delta \equiv (\forall x\,F[x]) \lor G, \forall x\,F[x] \;\vdash\; \forall x\,(F[x] \lor G)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \;\vdash\; G}\;\text{ax}}{\Gamma \;\vdash\; F[x] \lor G}\;\lor\text{ intro}}{\Gamma \equiv (\forall x\,F[x]) \lor G, G \;\vdash\; \forall x\,(F[x] \lor G)}\;\forall\text{ intro}^2}{\dfrac{(\forall x\,F[x]) \lor G \;\vdash\; \forall x\,(F[x] \lor G)}{\vdash\; (\forall x\,F[x]) \lor G \to \forall x\,(F[x] \lor G)}\;\to\text{ intro}}\;\lor\text{ elim}$$

[1] : $x$ n'est pas libre dans $\Delta$

[2] : $x$ n'est pas libre dans $\Gamma$

*(1)* *Question 3 :* on ajoute une nouvelle règle à la déduction naturelle appelée « double négation » :

$$\dfrac{}{\Gamma, \neg\neg F \;\vdash\; F}\;\text{double négation}$$

Démontrer que cette règle est dérivable en déduction naturelle classique (avec raisonnement par l'absurde).

$$\dfrac{\dfrac{\text{ax}\;\dfrac{}{\Gamma, \neg\neg F, \neg F \;\vdash\; \neg\neg F} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg\neg F \neg F \;\vdash\; \neg F}\;\text{ax}}{\Gamma, \neg\neg F, \neg F \;\vdash\; \bot}\;\neg\text{ elim}}{\Gamma, \neg\neg F \;\vdash\; F}\;\text{raisonnement par l'absurde}$$

*(1)* *Question 4 :* montrer que la règle du raisonnement par l'absurde est une règle dérivée dans le système « déduction naturelle sans raisonnement par l'absurde + règle de la double négation ».

$$\dfrac{\neg\text{ intro}\;\dfrac{\Gamma, \neg F \;\vdash\; \bot}{\Gamma \;\vdash\; \neg\neg F} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\neg F \;\vdash\; F}\;\text{double négation}}{\Gamma \;\vdash\; \neg\neg F \to F}\;\to\text{ intro}}{\Gamma \;\vdash\; F}\;\to\text{ elim}$$

*(1)* Qu'en déduisez-vous sur les deux règles « raisonnement par l'absurde » et « double négation » ?

Les deux règles sont équivalentes : toute preuve utilisant l'une peut être transformée en une preuve utilisant l'autre.

**Exercice 2 :** valuations.

*(2)* *Question 1 :* soit $\mathcal{L} = \{e, \_^{-1}, \times\}$ le langage de la théorie des groupes ; soit $\mathcal{M}$ l'interprétation suivante :
- $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$ ;
- $e_\mathcal{M} = 1$ ;
- $x \times_\mathcal{M} y = x \times y$ (multiplication) ;
- $x^{-1_\mathcal{M}} = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Donnez la valuation de la formule suivante : $\forall x\ x \times (x \times x^{-1}) = x$.

On a : $||\forall x\ x \times (x \times x^{-1}) = x||_\mathcal{M} = 1$ ssi
$||x \times (x \times x^{-1}) = x||_\mathcal{M}^{x:=a} = 1$ pour tout $a \in |\mathcal{M}|$ ssi
$||x \times (x \times x^{-1})||_\mathcal{M}^{x:=a} = ||x||_\mathcal{M}^{x:=a}$ pour tout $a \in |\mathcal{M}|$ ssi
$a \times_\mathcal{M} (a \times_\mathcal{M} a^{-1_\mathcal{M}}) = a$ pour tout $a \in |\mathcal{M}|$

Il y a deux cas possibles :
- $a = 0$ ; alors $a^{-1_\mathcal{M}} = 0$ et $a \times_\mathcal{M} (a \times_\mathcal{M} a^{-1_\mathcal{M}}) = 0$. On a bien l'égalité ;
- $a \neq 0$ ; alors $a^{-1_\mathcal{M}} = 1/a$, et on a bien $a \times_\mathcal{M} (a \times_\mathcal{M} a^{-1_\mathcal{M}}) = a \times a \times 1/a = a$.

Conclusion, l'égalité est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de $a$.
On a donc $||\forall x\ x \times (x \times x^{-1}) = x||_\mathcal{M} = 1$, ce qui signifie que la formule est valide dans $\mathcal{M}$.

*(2)* *Question 2 :* rappelez les axiomes de la théorie des groupes (sous forme de formules closes).
- associativité : $\forall x \forall y \forall z\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ ;
- élément neutre : $\forall x\ x \times e = e \times x = x$ ;
- inverses : $\forall x\ x \times x^{-1} = e = x^{-1} \times x$.

*(1)* *Question 3 :* est que cette structure satisfait les axiomes des groupes ?

Non : la dernière formules n'est pas valide dans $\mathcal{M}$ car $0 \times 0^{-1} \neq e$.

---

**Exercice 3 :** théorèmes.
On se place dans un langage avec un seul symbole de relation unaire $P$.

*(2)* *Question 1 :* est-ce que la formule $\big(\forall x\, P(x)\big) \to \big(\exists x\, P(x)\big)$ est un théorème ? Justifiez.

Soit $\mathcal{M}$ une structure sur ce langage.
On a $||\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)||_\mathcal{M} = 1$ ssi
$||\forall x\, P(x)||_\mathcal{M} = 0$ ou $||\exists x\, P(x)||_\mathcal{M} = 1$ ssi

$||P(x)||_{\mathcal{M}}^{x:=a} = 0$ pour un $a \in |\mathcal{M}|$ ou $||P(x)||_{\mathcal{M}}^{x:=b} = 1$ pour un $b \in |\mathcal{M}|$ ssi
$a \notin P_{\mathcal{M}}$ pour un $a \in |\mathcal{M}|$ ou $b \in P_{\mathcal{M}}$ pour un $b \in |\mathcal{M}|$

Par définition, un modèle n'est pas vide, il y a donc un élément $c$ dans $|\mathcal{M}|$. Pour cet élément particulier, on a bien $c \notin P_{\mathcal{M}}$ ou $c \in P_{\mathcal{M}}$ ; ce qui garantit que $||\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)||_{\mathcal{M}} = 1$. En conclusion, cette formule est valide dans tous les modèles de $\mathcal{L} = \{P\}$ ; c'est donc bien un théorème.

*(2)* *Question 2 :* donnez une autre justification pour la question précédente.

D'après le théorème de complétude, une formule est un théorème ssi elle est prouvable. Il suffit donc de démontrer $\big(\forall x\, P(x)\big) \to \big(\exists x\, P(x)\big)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, P(x) \ \vdash\ \forall x\, P(x)}\text{ax}}{\forall x\, P(x) \ \vdash\ P(x_0)}\ \forall\text{ intro}}{\forall x\, P(x) \ \vdash\ \exists x\, P(x)}\ \exists\text{ intro}}{\vdash\ \forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)}\ \to\text{ intro}$$

---

**Exercice 4 :** modèles.

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

*(2)* *Question 1 :* soit $\mathcal{L}$ le langage ne contenant qu'une relation binaire $R$. On définit deux structures pour $\mathcal{L}$ :

- $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$ et $R_{\mathcal{M}}$ est la relation $\leq$ ;
- $\mathcal{N}$ avec $|\mathcal{N}| = ]0,1[$ et $R_{\mathcal{N}}$ est la relation $\leq$.

Montrez que les deux structures sont isomorphes.

On montre facilement (en appliquant la définition de morphisme) qu'un morphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ est une fonction croissante entre $|\mathcal{M}|$ et $|\mathcal{N}|$. Il suffit donc de trouver une bijection croissante entre $\mathbf{R}$ et $]0,1[$. L'exemple canonique de telle bijection est donnée par

$$x \mapsto \frac{2\arctan(x)}{\pi}$$

Ça marche car arctan est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

*(2)* *Question 2 :* on définit une nouvelle structure $\mathcal{S}$ pour ce langage :

- $|\mathcal{S}| = \mathbf{R}^+$ et $R_{\mathcal{S}}$ est la relation $\leq$.

Est-ce que cette structure est isomorphe à $\mathcal{M}$ ?

Un des théorème du cours nous dit : « si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ sont isomorphes, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ satisfont les même formules closes. » Pour montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ ne sont pas isomorphes, il suffit donc de trouver une formule valide dans l'un et non valide dans l'autre.
On peut prendre $\exists x \forall y R(x,y)$ qui dit « il y a un élément $x$ plus petit que tous les autres ». Cette formule est valide dans $\mathcal{S}$ et non-valide dans $\mathcal{M}$.

---

*(bonus)* **Exercice : (difficile)** on a vu en TD qu'il y avait une formule $F$ sur le langage $\{e, \times, \_^{-1}, S\}$ ($e$ symbole de constante, $\times$ et $\_^{-1}$ symboles de fonctions binaire et unaire et $S$ symbole de relation unaire) qui vérifie :

- « $F$ a un modèle fini de cardinal $n$ ssi $n$ est un nombre composé (non-premier) ».

La formule $F$ était « axiomes des groupes » + « $S$ est un sous-groupe non-trivial ». Le théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) permettait de vérifier que $F$ satisfaisait bien la propriété voulue.

Redonnez cette formule : on définit

- $F_1 \equiv S(e)$ : $S$ n'est pas vide ;
- $F_2 \equiv \forall x \forall y\ S(x) \wedge S(y) \to S(x \wedge y)$ : $S$ est clos par multiplication ;
- $F_3 \equiv \forall x\ S(x) \to S(x^{-1})$ : $S$ est clos par inverses ;
- $F_4 \equiv \exists x\, x \neq e \wedge S(x) \ \wedge\ \exists x\, \neg S(x)$ : le sous groupe n'est pas trivial.

On prend donc :

$$F \equiv \text{« axiomes des groupes (voir exercice 2 question 2) »} \wedge F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4$$

Peut-on en déduire une formule $G$ vérifiant :

- tout modèle fini de $F$ est de cardinal premier ?

Non !

On ne peut pas prendre la négation de cette formule : toute structure qui n'est pas un groupe satisfait la négation de $F$ ; or, il existe de nombreuses structures sur $\mathcal{L} = \{e, \times, \_^{-1}\}$ qui ne sont pas des groupes et qui on un cardinal non-premier.

On ne peut pas non plus prendre la formule $F' \equiv$ « axiomes des groupes » $\wedge$ « $S$ n'est pas un sous-groupe non-trivial » ; car il peut y avoir d'autres sous-groupe que l'interprétation de $S$.

Il faudrait pouvoir dire « axiomes des groupes $\wedge\ \forall S\ S$ n'est pas un sous groupe », mais on n'a pas le droit de quantifier sur des des relations. (On peut étendre la logique pour faire ça. C'est la « logique d'ordre supérieur ».)