Introduction à la logique
Licence 3
Examen

20 janvier 2005

Durée : 3 heures, documents non-autorisés.

Un barème approximatif est donné dans la marge.

LAPINOT
Laissez-moi !!! Je suis innocent !
LE COWBOY
Si tu étais innocent, on te pendrait pas !
LAPINOT
Justement, vous ne pouvez pas me pendre... Donc je suis innocent.

L. Trondheim, « les formidables aventures de Lapinot : Blacktown »

Exercice 1 : Déduction naturelle

(2) *Question 1 :* démontrez en déduction naturelle la règle dérivée suivante : $\dfrac{\Gamma, A, B \ \vdash \ F}{\Gamma, A \wedge B \ \vdash \ F}$.

(6) *Question 2 :* démontrez en déduction naturelle les formules suivantes :
- $\big((A \to B) \to A \ \wedge \ (B \to A) \to B\big) \to A$;
- $(\exists x A \vee B) \leftrightarrow (\exists x A) \vee (\exists x B)$;
- $\big((A \to B) \to A\big) \to A$.

Exercice 2 : isomorphismes de modèles.
Soit $\mathcal{L}$ le langage $\{R\}$ où R est un symbole de relation binaire ; soit les modèles suivants :
- $\mathcal{M}_1$ avec $|\mathcal{M}_1| = [0, 1[$ et $(x, y) \in R_{\mathcal{M}_1}$ ssi $x < y$;
- $\mathcal{M}_2$ avec $|\mathcal{M}_2| =]-2, -1]$ et $(x, y) \in R_{\mathcal{M}_2}$ ssi $x > y$;
- $\mathcal{M}_3$ avec $|\mathcal{M}_3| =]-2, -1]$ et $(x, y) \in R_{\mathcal{M}_3}$ ssi $x < y$.

(2) *Question 1 :* est-ce que les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont isomorphes ? Pourquoi ?

(2) *Question 2 :* est-ce que les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_3$ sont isomorphes ? Pourquoi ?

---

(4) **Exercice 3 :** théorèmes.
On se place dans un langage quelconque.

Soit F une formule, est-ce que les formules suivantes sont des théorèmes ? Justifiez de deux manières différentes.
- $\neg\neg F \to F$;
- $F \wedge \neg F$.

Supposons que le langage contienne un symbole de relation binaire R. Est-ce que le formule suivante est un théorème ? Justifiez.
- $\exists x \ R(x, x)$.

Tournez SVP

(2) **Exercice 4 :** construction de modèle. (*cf.* TD 6)
Pour une formule F, on note $\mathcal{S}(F)$ (le *spectre* de F) l'ensemble des entiers n tels que F ait un modèle fini de cardinal n.

Choisissez un langage $\mathcal{L}$ et donnez une formule F telle que $\mathcal{S}(F) = \{n \mid n \neq 2 \pmod 3\}$.

Remarque : vous pouvez utiliser le fait que $n \neq 2 \pmod 3$ ssi $\begin{cases} n = 0 \pmod 3 \\ \text{ou} \\ n = 1 \pmod 3 \end{cases}$.

---

(2) **Exercice 5 :** valuations.
Explicitez la démonstration de la règle *sémantique* suivante :

$$\frac{\Gamma \models F}{\Gamma \models \forall x\ F} \quad \text{(si } x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma\text{).}$$

Autrement dit, si F est conséquence logique de Γ (tout modèle de Γ est aussi un modèle de F), alors $\forall x\ F$ est une conséquence logique de Γ.

Remarque : la démonstration complète n'est pas nécessaire pour obtenir tous les points. Il suffit de donner le raisonnement et d'énoncer les lemmes nécessaires...

(bonus) **Exercice : (pas facile)** modèles (bis).

Donnez une formule F, ou une idée de formule (dans un langage de votre choix) telle que :
- F n'a pas de modèle fini ;
- F a des modèles infinis.

Justifiez.
