Introduction à la logique

L3, année 2005/2006

Correction de l'examen

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy, bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : `hyvernat@iml.univ-mrs.fr`
`http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html`

Exercice 1 : Déduction naturelle.

(2) *Question 1 :* démontrez en déduction naturelle la règle dérivée suivante : $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}$.

Preuve en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash A \to B}\ \text{affaiblissement} \qquad \dfrac{\text{axiome}}{\Gamma, A \vdash A}}{\Gamma, A \vdash B}\ \to\text{-elim}$$

Question 2 : démontrez en déduction naturelle les formules suivantes :

- $\big((A \to B) \to C\big) \to (B \to C)$;
- le paradoxe du buveur : $\exists x\,\big(B(x) \to \forall y\, B(y)\big)$.

Pour la deuxième preuve, vous avez droit aux règles dérivées et au tiers-exclu...

(2) Preuve de $\big((A \to B) \to C\big) \to (B \to C)$ en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{axiome}}{(A \to B) \to C, B \vdash (A \to B) \to C} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{axiome}}{(A \to B) \to C, B, A \vdash B}}{(A \to B) \to C, B \vdash A \to B}\ \to\text{-intro}}{(A \to B) \to C, B \vdash C}\ \to\text{-elim}}{\vdash \big((A \to B) \to C\big) \to (B \to C)}\ \to\text{-intro}, \times 2$$

(2) Preuve de $\exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ en déduction naturelle « linéaire » :

$\exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ . . . . $\vee$-elim

(1.) $\vdash\ \exists x\,\neg B(x)\ \ \vee\ \ \neg\exists x\,\neg B(x)$ . . . . tiers-exclu

(2.) $\exists x\,\neg B(x)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$

(3.) $\neg\exists x\,\neg B(x)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$

(2.) $\exists x\,\neg B(x)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ . . . . $\exists$-elim

(2.1.) $\exists x\,\neg B(x)\ \vdash\ \exists x_0\,\neg B(x_0)$ . . . . axiome (α-conversion)

(2.2.) $\exists x\,\neg B(x), \neg B(x_0)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ . . . . affaiblissement, $\exists$-intro pour $t := x_0$

$\neg B(x_0)\ \vdash\ B(x_0)\to\forall y\,B(y)$ . . . . $\to$-intro

$\neg B(x_0)B(x_0)\ \vdash\ \forall y\,B(y)$ . . . . $\perp$-elim

$\neg B(x_0)B(x_0)\ \vdash\ \perp$ . . . . $\neg$-elim

(2.2.1.) $\neg B(x_0)B(x_0)\ \vdash\ \neg B(x_0)$ . . . . axiome

(2.2.2.) $\neg B(x_0)B(x_0)\ \vdash\ B(x_0)$ . . . . axiome

(3.) $\neg\exists x\,\neg B(x)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ . . . . règle dérivée, lois de de Morgan

$\forall x\,B(x)\ \vdash\ \exists x\,\big(B(x)\to\forall y\,B(y)\big)$ . . . . $\exists$-intro pour $t := z$

$\forall x\,B(x)\ \vdash\ B(z)\to\forall y\,B(y)$ . . . . $\to$-intro

$\forall x\,B(x), B(z)\ \vdash\ \forall y\,B(y)$ . . . . axiome (α-conversion)

Exercice 2 : modèles et isomorphismes.

(2) *Question 1 :* rappelez la définition de *modèle* (ou *structure*) pour un langage $\mathcal{L}$.

Un modèle $\mathcal{M}$ pour un langage $\mathcal{L}$ est la donnée de :

- un ensemble non vide $|\mathcal{M}|$ appelé « support » de $\mathcal{M}$;
- pour chaque symbole de constante c de $\mathcal{L}$, un élément $c_{\mathcal{M}}\in|\mathcal{M}|$;
- pour chaque symbole de fonction f d'arité k de $\mathcal{L}$, une fonction $f_{\mathcal{M}}\ :\ |\mathcal{M}|^k\to|\mathcal{M}|$;
- pour chaque symbole de relation R d'arité k de $\mathcal{L}$, un sous-ensemble $R_{\mathcal{M}}\ \subseteq\ |\mathcal{M}|^k$.

(1) *Question 2 :* rappelez la définition de *morphisme* entre modèles d'un même langage.

Un morphisme entre deux modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ d'un même langage $\mathcal{L}$ est donné par une fonction $f : |\mathcal{M}_1|\to|\mathcal{M}_2|$ vérifiant :

- pour chaque symbole de constante c de $\mathcal{L}$, on a $f(c_{\mathcal{M}_1}) = c_{\mathcal{M}_2}$;
- pour chaque symbole de fonction g d'arité k de $\mathcal{L}$, on a, pour tous les $u_1,\dots,u_k\in|\mathcal{M}_1|$, $f\big(g_{\mathcal{M}_1}(u_1,\dots,u_k)\big)\ =\ g_{\mathcal{M}_2}\big(f(u_1),\dots,f(u_k)\big)$;

– pour tout symbole de relation R d'arité k de $\mathcal{L}$, on a, pour tous $u_1, \ldots, u_k \in |\mathcal{M}_1|$, $(u_1, \ldots, u_k) \in R_{\mathcal{M}_1}$ ssi $\big(f(u_1), \ldots, f(u_k)\big) \in R_{\mathcal{M}_2}$.

(Le dernier point ne concerne en général pas l'égalité...)

Question 3 : on utilise le langage $\mathcal{L} = \{1, +, <\}$, où 1 est un symbole de constante, + est un symbole de fonction binaire et < un symbole de relation binaire.

On définit les modèles suivants :

– $\mathcal{M}_1$ avec $|\mathcal{M}_1| = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ et l'interprétation habituelle des symboles du langage ;

– $\mathcal{M}_2$ avec $|\mathcal{M}_2| =$ « ensemble des nombres pairs » $= \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ et l'interprétation suivante :

  - + est interprété par l'addition,
  - $1_{\mathcal{M}_2} = 2$;

– $\mathcal{M}_3$ avec $|\mathcal{M}_3| = \mathbf{Q}^+ =$ « ensemble des rationnels positifs ou nuls » et l'interprétation habituelle des symboles du langage.

(2) Montrez que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont isomorphes.

La fonction f définie par $f(n) = 2n$ est un isomorphisme de modèle entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$:

– il est trivial de vérifier que f est une bijection entre $|\mathcal{M}_1|$ et $|\mathcal{M}_2|$;

– on a bien $f(1_{\mathcal{M}_1}) = f(1) = 2 = 1_{\mathcal{M}_2}$ (unique symbole de constante) ;

– pour tous les $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, on a bien $f(n_1 +_{\mathcal{M}_1} n_2) = f(n_1 + n_2) = 2(n_1 + n_2) = 2n_1 + 2n_2 = f(n_1) +_{\mathcal{M}_2} f(n_2)$ (unique symbole de fonction binaire) ;

– pour tous les $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, on a bien $(n_1, n_2) \in$ "$<_{\mathcal{M}_1}$" ssi $n_1 < n_2$ ssi $2n_1 < 2n_2$ ssi $f(n_1) < f(n_2)$ ssi $\big(f(n_1), f(n_2)\big) \in$ "$<_{\mathcal{M}_2}$"

(1) Montrez que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}3$ ne sont pas isomorphes.

La formule suivante est vrai dans $\mathcal{M}_2$ et fausse dans $\mathcal{M}_1$: $\forall x \forall y \big(x < y \rightarrow \exists x\, x < z \wedge z < y\big)$. (Cette formule exprime qu'on peut toujours trouver un rationnel entre deux rationnels différents.)

(1) Que pouvez-vous en déduire sur les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_3$?

Les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_3$ ne sont donc pas isomorphes...

Exercice 3 : théorèmes.

(1) Rappelez la définition de *théorème*.

Un théorème est une formule qui est vrai dans tous les modèles du langage considéré, et pour tous les environements.

(3) Est-ce que les formules suivantes sont des théorèmes ? (N'oubliez pas de justifier vos réponses...)

– $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$: c'est un théorème car la valeur de vérité de $A \wedge B$ est la même que la valeur de vérité de $B \wedge A$;

– $A \wedge \neg A$: ce n'est pas un théorème car la valeur de vérité de $A \wedge \neg A$ est toujours *faux* ;

– $\forall x\, \exists y\, x < y$ (pour un langage avec un symbole de relation binaire) : ce n'est pas un théorème car la valeur de vérité de cette formule est *faux* dans le modèle suivant : $|\mathcal{M}| = \mathbf{N}$ et "$<_\mathcal{M}$" $= \{(n, m) \mid n \neq m\}$.

(1) Donnez une deuxième justification pour la formule $A \wedge \neg A$.

Cette formule n'est pas un théorème car sa négation est prouvable : sa négation est donc un théorème par le théorème de complétude.

Exercice bonus : construction de modèle.
Soit le langage avec un unique symbole de relation binaire noté $\leq$; soient les formules suivantes :
- $F_1 \equiv \forall x\ x \leq x$
- $F_2 \equiv \forall x \forall y\ (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$
- $F_3 \equiv \forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z$
- $F_4 \equiv \forall x \forall y\ (x \leq y \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z\ (x \leq z \wedge z \leq y \wedge z \neq x \wedge z \neq y)$
- $F_5 \equiv \forall x\ \exists y\ (y \leq x \wedge y \neq x)$
- $F_6 \equiv \forall x\ \exists y\ (x \leq y \wedge y \neq x)$

Remarques : F_1, F_2 et F_3 expriment que $\leq$ est une relation d'ordre ; F_4 dit qu'entre deux éléments distincts, on peut en trouver un autre ; et F_5 et F_6 disent qu'il n'y à pas d'élement maximal ou minimal.

(1) Donnez un modèle pour les théories suivantes :
- $T_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$: il suffit de prendre les rationels ou les réels, avec la relation d'ordre habituelle ;
- $T_2 = \{F_1, F_2, F_3, \neg F_4, \neg F_5, \neg F_6\}$: on peut par exemple prendre les entiers compris entre 1 et 10 ou l'ensemble $[0, 1] \cup [2, 3]$... (Toujours avec l'ordre habituel.)

(1) Expliquez pourquoi on ne peut pas trouver un modèle de la théorie suivante :
- $T_3 = T_1 \cup \big\{\exists x_1 \exists x_2\, \forall x\ (x = x_1 \vee x = x_2)\big\}$.

Par F_5 (ou F_6), le modèle contient au moins deux élements distincts. Par F_4, il doit en contenir une infinité... Comme la formule $\exists x_1 \exists x_2\, \forall x\ (x = x_1 \vee x = x_2)$ exprime que le modèle contient *au plus* deux éléments, les formules de la théorie T_3 sont contradictoires : par le théorème de complétude, T_3 n'a donc pas de modèle...
