

Correction de l'exercice 6 du TD 3.

Avant de regarder la correction, je vous conseille vivement d'essayer de faire la preuve du tiers-exclu sans utiliser les règles dérivées...

a) tiers-exclu :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\text{axiome}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \quad \frac{\text{axiome}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg A} \quad \text{V-intro} \quad \frac{\text{axiome}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A} \quad \text{V-intro} \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A) \quad \neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \perp} \text{-elim} \quad \frac{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A) \quad \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \perp} \text{-elim} \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \perp}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A} \text{-intro} \quad \frac{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \perp}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A} \text{-intro} \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A \quad \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp} \text{-elim} (\star) \\
 \frac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp}{\vdash A \vee \neg A} \text{r.a.}
 \end{array}$$

L'étape la plus difficile est la première règle \neg -elim, où il faut penser à utiliser les formules $\neg\neg A$ et $\neg A$...

b) loi de Pierce :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\text{axiome}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A} \quad \frac{\text{axiome}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A, A \vdash \neg A} \quad \frac{\text{axiome}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A, A \vdash A} \text{-elim} \\
 \frac{\text{axiome}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A} \quad \frac{\text{axiome}}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A} \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A, A \vdash \perp}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A, A \vdash B} \text{-elim} (\star) \\
 \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A \quad (A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash A} \text{-elim} \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A, A \vdash B}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash A \rightarrow B} \text{-intro} \\
 \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash \perp}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A} \text{r.a.} \quad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A, \neg A \vdash A}{\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \text{-intro}
 \end{array}$$

Là, il faut penser à utiliser la règle \perp -elim...