Exercice 3, correction : montrez que la relation « *être un sous terme de* » est transitive.

Remarque : on note $t_1 \sqsubseteq t_2$ pour « $t_1 \in \mathcal{ST}(t_2)$ »

On veut montrer la propriété suivante :

Tr : « *pour tous les termes t_1, t_2 et t_3, si $t_1 \sqsubseteq t_2$ et $t_2 \sqsubseteq t_3$, alors $t_1 \sqsubseteq t_3$.* »

On fait la preuve par récurrence sur t_2.

Cas de base : si t_2 est une constante ou une variable.

▷ Si t_2 est la constante c, il faut montrer la propriété *Tr* dans le cas où t_2 est c.
Supposons $t_1 \sqsubseteq c$ (H_1) et $c \sqsubseteq t_3$ (H_2), montrons que $t_1 \sqsubseteq t_3$.
Par H_1 et la définition de $\mathcal{ST}$, on a $t_1 \in \mathcal{ST}(c) = \{c\}$ et donc $t_1 = c$.
Par H_2, on obtient donc $t_1 \sqsubseteq t_3$.

▷ Si t_2 est une variable, c'est exactement la même chose (en remplaçant c par x).

Cas d'induction : si t_2 est de la forme $f(t'_1, \ldots, t'_n)$.
Les hypothèses d'inductions sont de la forme

HR_i : « *pour tous les termes t_1 et t_3, si $t_1 \sqsubseteq t'_i$ et $t'_i \sqsubseteq t_3$, alors $t_1 \sqsubseteq t_3$.* »

pour $i = 1, \ldots, n$.
Il faut montrer la propriété *Tr* dans le cas où t_2 est $f(t'_1, \ldots, t'_n)$, c'est à dire :

« *pour tous les termes t_1 et t_3,*
si $t_1 \sqsubseteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$ et $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq t_3$, alors $t_1 \sqsubseteq t_3$. »

Supposons que $t_1 \sqsubseteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$ (H_3) et $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq t_3$ (H_4), montrons que $t_1 \sqsubseteq t_3$.

Par H_1 et la définition de $\mathcal{ST}$, on a

$$t_1 \in \{f(t'_1, \ldots, t'_n)\} \cup \mathcal{ST}(t'_1) \cup \cdots \cup \mathcal{ST}(t'_n)$$

On fait une analyse par cas :

▷ *Si $t_1 \in \{f(t'_1, \ldots, t'_n)\}$,* alors on peut déduire que $t_1 = f(t'_1, \ldots, t'_n)$. Comme l'hypothèse H_4 garantit que $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq t_3$, on peut conclure directement.

▷ *Si $t_1 \in \mathcal{ST}(t'_i)$ (H_6) pour un i compris entre 1 et n,* on va utiliser l'hypothèse de récurrence HR_i :

« *pour tous les termes t_1 et t_3, si $t_1 \sqsubseteq t'_i$ et $t'_i \sqsubseteq t_3$, alors $t_1 \sqsubseteq t_3$.* »

Comme on sait que $t_1 \sqsubseteq t'_i$ (hypothèse H_6), il suffit de montrer que $t'_i \sqsubseteq t_3$. Une fois ceci démontré, on pourra alors appliquer HR_i pour obtenir $t_1 \sqsubseteq t_3$.

La propriété $t'_i \sqsubseteq t_3$ est une conséquence de l'hypothèse $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq t_3$. Pour le démontrer, on fait une récurrence sur t_3.
On va donc montrer

P : « pour tout t_3, si $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq t_3$, alors $t'_i \sqsubseteq t_3$ »

Cas de base : si t_3 est une variable ou une constante.
▷ si t_3 est une constante c, il faut montrer la propriété P où t_3 est remplacé par c. Comme il est impossible que $f(t'_1, \ldots, t'_n)$ soit un sous terme de c, il n'y a rien à démontrer.
▷ si t_3 est une variable x : idem.

Cas d'induction : si t_3 est de la forme $g(u_1, \ldots, u_m)$.
Les hypothèses d'induction sont de la forme

HR'_j : « *Si $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq u_j$ alors $t'_i \sqsubseteq u_j$.* »

pour tous les $j = 1, \ldots, m$.

On veut montrer la propriété P dans le cas où t_3 est $g(u_1, \ldots, u_m)$:

si $f(t'_1, \ldots, t'_n) \sqsubseteq g(u_1, \ldots, u_m)$, alors $t'_i \sqsubseteq g(u_1, \ldots, u_m)$.

Supposons que $f(t'_1, \dots, t'_n) \sqsubseteq g(u_1, \dots, u_m)$ (H_7), montrons que $t'_i \sqsubseteq g(u_1, \dots, u_m)$. Par l'hypothèse H_7 et la définition de $\mathcal{ST}$, on obtient

$$f(t'_1, \dots, t'_n) \in \{g(u_1, \dots, u_m)\} \cup \mathcal{ST}(u_1) \cup \cdots \cup \mathcal{ST}(u_m)$$

On continue avec une analyse par cas :
$\triangleright$ si $f(t'_1, \dots, t'_n) \in \{g(u_1, \dots, u_m)\}$: cela implique que $f = g$, $n = m$ et $t_i = u_i$ pour tous les $i = 1, \dots, n$.
Il faut montrer que $t'_i \sqsubseteq f(t'_1, \dots, t'_n)$. C'est une application directe de la définition et du fait que $t'_i \in \mathcal{ST}(t'_i)$.
$\triangleright$ Si $f(t'_1, \dots, t'_n) \in \mathcal{ST}(u_j)$, alors on peut utiliser l'hypothèse d'induction pour j. On obtient donc $t'_i \sqsubseteq u_j$, c'est à dire $t'_i \in \mathcal{ST}(u_j)$. Comme $\mathcal{ST}(u_j) \subset \mathcal{ST}\big(g(u_1, \dots, u_m)\big)$, on peut finalement conclure que $t'_i \in \mathcal{ST}\big(g(u_1, \dots, u_m)\big)$.