

Introduction à la logique

TD 1 : langage et termes

Pierre Hyvernât
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : hyvernât@iml.univ-mrs.fr
<http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernât/enseignement.html>

Exercice 1 : soit \mathcal{L} un langage au plus dénombrable ; montrez que l'ensemble des termes sur \mathcal{L} est dénombrable.

Exercice 2 : essayez de trouver des langages pour les théories suivantes : les groupes, les groupes commutatifs, les anneaux, les corps, les espaces vectoriels, l'analyse, la géométrie plane...

Exercice 3 : montrez que la relation « être un sous terme de » est transitive. Montrez que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ? Y'a-t'il des éléments minimaux ? Des éléments maximaux ?

Exercice 4 : montrez l'équivalence entre la définition « l'ensemble des termes est le plus petit ensemble stable par ... » et la définition « cumulative ».

Exercice 5 : soit \mathcal{L} le langage comportant :

- deux symboles de constante a et b ;
- trois symboles de fonction f , g et $+$ d'arités respectives 1, 2 et 2 ($+$ noté de manière infixé) ;
- deux symboles de relation R et S d'arités respectives 1 et 2.

Question 1 : pour chacun des mots suivants, dire s'il s'agit ou non d'un terme. Si oui, dessinez son arbre, décidez s'il s'agit d'un terme clos et donnez sa taille et sa profondeur.

- a) $g(g(a, b))$
- b) $g(a, , b)$
- c) $f(g(x, f(b)))$
- d) $g(S(a, a), b)$
- e) $()$
- f) $f(f(f(f(f(f(f(f(a + x_0))))))))$
- g) $R(f(a) + b)$
- h) $f(g(a + b), f(x + f(b + (g(b, a)))) + g(g(a, f(b)), g(b + f(a), a))$

Question 2 : soit t un terme dans ce langage de profondeur n . Quelle est sa taille maximale ? Sa taille minimale ? (Étudiez en premier le cas pour $n = 2$; utilisez les arbres de terme.)

Question 3 : soit les termes

- $t = g(a, f(x)) + f(g(x, y))$;
- $u = x + f(y)$;
- $v = g(y, a + x)$.

Calculez et comparez les termes $t[x := u][y := v]$ et $t[y := v][x := u[y := v]]$.

Question 4 : démontrez le résultat suivant :

Lemme. Si t , u et v sont des termes, x et y des variables distinctes tels que x n'apparaît pas dans v ; alors

$$t[x := u][y := v] = t[y := v][x := u[y := v]].$$