Introduction à la logique

TD 2 : formules

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : `hyvernat@iml.univ-mrs.fr`
`http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html`

Exercice 1 : donnez une définition « cumulative » de l'ensemble des formules. (*c.f.* la définition cumulative de l'ensemble des termes.)

Exercice 2 : montrez que la relation « *être une sous formule de* » est transitive. Montrez que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ? Y'a-t'il des éléments minimaux ? Des éléments maximaux ?

Exercice 3 : soit F une formule de taille n. Quelle est sa profondeur maximale ? Quelle est sa profondeur minimale ?

Exercice 4 : soit $\mathcal{L}$ le langage comportant :
- deux symboles de constante a et b ;
- trois symboles de fonction f, g et $+$ d'arités respectives 1, 2 et 2 ($+$ noté de manière infixe) ;
- deux symboles de relation R et S d'arités respectives 1 et 2.

Question 1 : pour chacun des mots suivants, dire s'il s'agit ou non d'une formule. Si oui, décidez s'il s'agit d'une formule close et donnez sa taille et sa profondeur.

a) $g(g(a,b))$
b) $R(a,a)$
c) $R(f(a)+b)$
d) $S(a,a)+R(x)$
e) $(S(a,a+b) \land R(f(x))) \to \forall x\, R(g(x,x))$
f) $\neg(\neg(\neg(\neg(R(x) \to (R(y) \to (R(z) \to R(x+y+z)))))))$
h) $R(a) \to R(b) \to R(c)$

Question 2 : trouver des formules alpha-équivalentes des formules suivantes qui satisfont la propriété suivante : « *les variables liées sont 2 à 2 distinctes* » et « *aucune variable libre n'est liée dans une partie de la formule* ».
- $\forall x\, R(x) \to \forall x\, S(x,y)$
- $\forall x\, \big(R(x) \lor S(x,x) \to \forall x\, S(x,y)\big)$
- $\exists x\, \Big(R(x) \lor \big(\exists x\, R\big(f(x)\big) \lor \big(\exists x\, R\big(g(x,x)\big) \lor \forall x\, S(x,x)\big)\big)\Big)$

Question 3 : soit la formule F et les termes u et v suivants :
- $F = \big(S(a,x) \land R(x)\big) \to \big(\forall y\, S(x,b+y)\big) \lor S(x+y,y)$;
- $u = f(x+y)$;
- $v = g(y,a)$.

Calculez et comparez les formules $F[x:=u][y:=v]$ et $F[y:=v]\big[x:=u[y:=v]\big]$.

Question 4 : démontrez le résultat suivant :

> **Lemme.** *Si F est une formule, u et v des termes, x et y des variables distinctes tels que x n'apparaît pas dans v ; alors*
> $$F[x:=u][y:=v] = F[y:=v]\big[x:=u[y:=v]\big].$$