Introduction à la logique

TD 4 : déduction naturelle, calcul des prédicats

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : `hyvernat@iml.univ-mrs.fr`
`http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html`

Exercice 1 : montrer que l'égalité est une relation symétrique et transitive :
- $u = v \ \vdash \ v = u$
- $u = v, v = t \ \vdash \ u = t$.

Exercice 2 : de Morgan :
a) $\forall x \, \neg F \rightarrow \neg \exists x \, F$;
b) $\neg \exists x \, F \rightarrow \forall x \, \neg F$;
c) $\exists x \, \neg F \rightarrow \neg \forall x \, F$;
d) $\neg \forall x \, F \rightarrow \exists x \, \neg F$.
Le raisonnement par l'absurde n'est nécessaire que pour *d*.

Exercice 3 : quantificateurs et connecteurs. Prouvez quelques unes des formules suivantes :
a) $\forall x \, (A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x \, A) \wedge (\forall x \, B)$;
b) $\exists x \, (A \vee B) \leftrightarrow (\exists x \, A) \vee (\exists x \, B)$;
c) $\forall x \, (A \vee B) \leftrightarrow (\forall x \, A) \vee B$ si x n'est pas libre dans B ;
d) $\exists x \, (A \wedge B) \leftrightarrow (\exists x \, A) \wedge B$ si x n'est pas libre dans B ;
e) $\exists x \, (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall x \, A) \rightarrow (\exists x \, B)$;
f) $\forall x \, (A \rightarrow B) \leftrightarrow A \rightarrow (\forall x \, B)$ si x n'est pas libre dans A ;
g) $\forall x \, (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\exists x \, A) \rightarrow B$ si x n'est pas libre dans B ;
h) $(\forall x \, A) \vee (\forall x \, B) \rightarrow \forall x \, (A \vee B)$;
i) $\exists x \, (A \wedge B) \rightarrow (\exists x \, A) \wedge (\exists x \, B)$.
Les réciproques de h et i sont fausses...

Exercice 4 : prouvez la formule $(\forall x \, F) \rightarrow (\exists x \, F)$; discutez...

Exercice 5 : le paradoxe du buveur. « Dans chaque bar, il y a quelqu'un qui, s'il boit, tout le monde boit. » Soit $\mathcal{L}$ le langage qui ne comporte qu'un seul symbole de relation unaire : B.
Prouver $\vdash \ \exists x \, \big(B(x) \rightarrow \forall y \, B(y)\big)$.

Exercice 6 : soit les formules suivantes :
- $F_1 \equiv \forall x \, \Big(\exists y \, R(x,y) \rightarrow R\big(x, f(x)\big)\Big)$;
- $F_2 \equiv \forall x \exists y \ R(x,y)$;
- $F_3 \equiv \exists x \, R\Big(f\big(f(x)\big), x\Big)$;
- $F \equiv \exists x, y, z \ \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,x)\big)$.

Prouver $F_1, F_2, F_3 \ \vdash \ F$.