Introduction à la logique

TD 5 : structures et interprétations

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : hyvernat@iml.univ-mrs.fr
http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html

Exercice 1 : si $\mathcal{L}$ est le langage de la théorie des groupes, donnez une structure pour $\mathcal{L}$ ayant l'ensemble des entiers naturels comme support. Est-ce un groupe ?

Exercice 2 : soit $\mathcal{L} = \{a, f, R\}$ un langage où a est une constante, f une fonction binaire et R une relation binaire. On interprète $\mathcal{L}$ par :
- $|\mathcal{M}| = \mathbf{N}$
- $a_{\mathcal{M}} = 3$
- $f_{\mathcal{M}}(n, m) = n \times m$
- $(n, m) \in R_{\mathcal{M}}$ ssi $n \leq m$

Donnez les valuations des formules suivantes :
- $R(a, f(a, a))$
- $\forall x\, R\big(x, f(a, x)\big)$
- $\forall x\, \exists y\, R(y, x)$
- $\exists x\, \forall y\, R\big(f(a, x), y\big)$

Même question si on utilise $|\mathcal{M}| = \mathbf{Z}$ à la place.

Exercice 3 : deux formules F et G sont dites équivalentes si la formule $F \leftrightarrow G$ est un théorème. Montrez que toute formule est équivalente à une formules qui n'utilise que les symboles logiques $\neg$, $\vee$ et $\exists$

Exercice 4 : pour le langage $\{e, f\}$, montrez que les interprétations suivantes sont isomorphes :
- $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$; $e_{\mathcal{M}} = 0$ et $f(a, b) = a + b$;
- $|\mathcal{N}| = \mathbf{R}^*_+$; $e_{\mathcal{N}} = 1$ et $f(a, b) = a \times b$.