Introduction à la logique

TD 6 : structures et interprétations (bis)

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : `hyvernat@iml.univ-mrs.fr`
`http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html`

Exercice 1 :
On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

Question 1 : soit $\mathcal{L}$ le langage ne contenant qu'une relation binaire R. On définit deux structures pour $\mathcal{L}$:

- $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbf{R}$ et $R_{\mathcal{M}}$ est la relation $\leq$;
- $\mathcal{N}$ avec $|\mathcal{N}| =]0,1[$ et $R_{\mathcal{N}}$ est la relation $\leq$.

Montrez que les deux structures sont isomorphes.

Question 2 : on définit une nouvelle structure $\mathcal{S}$ pour ce langage :

- $|\mathcal{S}| = \mathbf{R}^+$ et $R_{\mathcal{S}}$ est la relation $\leq$.

Est-ce que cette structure est isomorphe à $\mathcal{M}$?

Exercice 2 : soit $\mathcal{M}$ une structure sur un langage $\mathcal{L}$; soit X un ensemble et f une bijection de X dans $|\mathcal{M}|$. Faites de X une structure pour le langage $\mathcal{L}$.
Est-ce que cette structure est isomorphe à $\mathcal{M}$?

Exercice 3 : si F est une formule, on note $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des entiers n pour lesquels F a un modèle de cardinalité n. Dans chacun des cas, déterminez une formule F telle que $\mathcal{S}(F) = E$:

(les premiers sont faciles, mais les derniers sont difficiles !)

- $E = \mathbf{N}^*$
- $E = \{1, \dots k\}$
- $E = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, \dots k\}$
- $E = \{k\}$
- $E = \{n \mid n = 2 \pmod 3\}$
- $E = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}^*\}$
- $E = \{n \mid n > 1 \text{ et } n \text{ non premier}\}$