Introduction à la logique

TD 7 : modèles et arithmétique

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : hyvernat@iml.univ-mrs.fr
http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html

Exercice 1 : soit $\mathcal{L}$ le langage $\{0, 1, +, \times\}$ et $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ les interprétations suivantes :

- $|\mathcal{M}_1| = \mathbf{Z}$, avec les opérations habituelles ;
- $|\mathcal{M}_2| = \big\{$matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbf{Z}\big\}$, avec les opérations habituelles ;
- $|\mathcal{M}_3| = \mathbf{Z}[i] = \{n + im \mid n, m \in \mathbf{Z}\}$, avec les opérations habituelles.

Trouvez des formules F_1, F_2 et F_3 telles que :

- $\mathcal{M}_1 \models F_1$, $\mathcal{M}_2 \not\models F_2$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F_3$;
- $\mathcal{M}_1 \not\models F_1$, $\mathcal{M}_2 \models F_2$ et $\mathcal{M}_3 \not\models F_3$;
- $\mathcal{M}_1 \not\models F_1$, $\mathcal{M}_2 \not\models F_2$ et $\mathcal{M}_3 \models F_3$.

Exercice 2 : soit le langage $\mathcal{L} = \{f, g, R\}$ où f et g sont des symboles de fonction unaire et R est un symbole de relation unaire. Soient les formules suivantes :

- $F_1 \equiv \exists x\, \exists y\, R(x) \wedge \neg R(y)$
- $F_2 \equiv \forall x\, \exists y\, R(x) \rightarrow R(y) \wedge x \neq y$
- $F_3 \equiv \forall x\, \forall y\, R(x) \wedge R(y) \rightarrow \big(f(x) = f(y) \rightarrow x = y\big)$
- $F_4 \equiv \forall x\, \forall y\, R(x) \wedge R(y) \rightarrow \big(g(x) = g(y) \rightarrow x = y\big)$
- $F_5 \equiv \forall y\, \exists x\, R(y) \rightarrow R(x) \wedge y = f(x)$
- $F_6 \equiv \forall y\, \exists x\, R(y) \rightarrow R(x) \wedge y = g(x)$
- $F_7 \equiv \forall x\, \exists y\, R(x) \rightarrow R(y) \wedge f(x) = g(y)$
- $F_8 \equiv \exists x\, \exists y\, R(x) \wedge R(y) \wedge f(x) \neq g(y)$
- $F_9 \equiv \forall x\, \forall y\, f(x) = g(y) \rightarrow R(x) \vee R(y)$

Donnez un modèle (s'il existe) de chacune des théories suivantes :

- $T_1 = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9\}$
- $T_2 = \{F_1, \neg F_2, F_3, \neg F_4, F_5, \neg F_6, F_7, \neg F_8, F_9\}$
- $T_3 = \{\neg F_1, F_2, \neg F_3, F_4, \neg F_5, F_6, \neg F_7, F_8, \neg F_9\}$

Exercice 3 : prouvez, de deux manières différentes, le lemme suivant :

> *pour toute théorie T et toute formule F, si $T \models F$ et si la variable x n'apparait pas dans T, alors $T \models \forall x\, F$.*

Exercice 4 : prouvez, à partir des axiomes de récurrence de l'arithmétique de Peano, le second axiome de Peano ($A_2 \equiv \forall x\, x = 0 \vee \exists z\, x = \mathrm{S}\, z$).

Exercice 5 : prouvez, dans l'arithmétique de Peano, la formule $\forall x\, 0 + x = x$.
Prouvez (c'est plus difficile) la formule $\forall x\, \forall y\, x + y = y + x$.

Exercice 6 : on *définit* l'ordre habituel par

$$x \leq y \quad \equiv \quad \exists z\, x + z = y$$

Montrez les propriétés habituelles concernant cet ordre. (Transitivité, réflexivité, anti-symétrie, 0 est le plus petit élément etc.)