Symétrie

l'art des pavages et les mathématiques des kaléidoscopes

Amphis pour tous

Pierre Hyvernat (`pierre.hyvernat@univ-smb.fr`)

Laboratoire de mathématiques, université Savoie Mont Blanc

Archamps, 30 janvier 2018

Qu’est-ce que la symétrie ?

D’après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu’on voit d’une vue, fondée sur ce qu’il n’y a pas de raison de faire autrement,*

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

D'après Wikipedia,

Définition

Un système est symétrique quand on peut permuter ses éléments ***en laissant sa forme inchangée****.*

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

D'après Wikipedia,

Définition

Un système est symétrique quand on peut permuter ses éléments ***en laissant sa forme inchangée****.*

*Le concept d'****automorphisme*** *permet de préciser cette définition.*

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

D'après Wikipedia,

Définition

*Un système est symétrique quand on peut permuter ses éléments **en laissant sa forme inchangée**.*

*Le concept d'**automorphisme** permet de préciser cette définition.*

Il faut donc préciser le sens de *permuter* :

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

D'après Wikipedia,

Définition

Un système est symétrique quand on peut permuter ses éléments ***en laissant sa forme inchangée****.*

*Le concept d'**automorphisme** permet de préciser cette définition.*

Il faut donc préciser le sens de *permuter* :

il s'agira ici de *déplacements géométrique*.

Qu'est-ce que la symétrie ?

D'après Blaise Pascal (*Pensées*) :

> *Symétrie, en ce qu'on voit d'une vue, fondée sur ce qu'il n'y a pas de raison de faire autrement, et fondée aussi sur la figure de l'homme, d'où il arrive qu'on ne veut la symétrie qu'en largeur, non en hauteur ni profondeur.*

D'après Wikipedia,

Définition

*Un système est symétrique quand on peut permuter ses éléments **en laissant sa forme inchangée**.*

*Le concept d'**automorphisme** permet de préciser cette définition.*

Il faut donc préciser le sens de *permuter* :

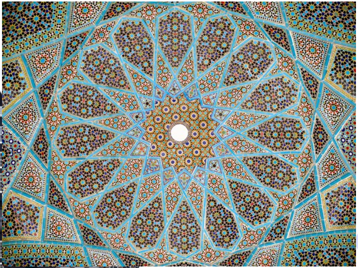
il s'agira ici de *déplacements géométrique*.

(plus précisément appelés *isométries*)

Exemples de symétries

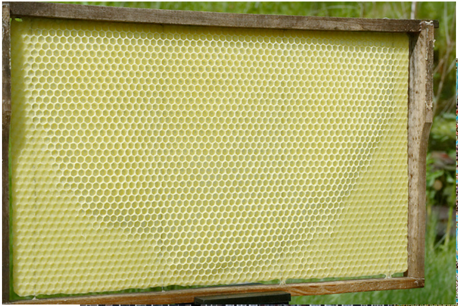
Amsterdam[6]

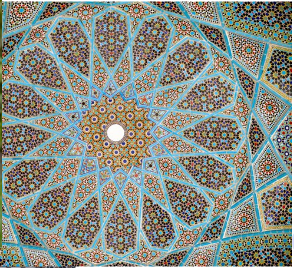
Exemples de symétries



Mausolée de Hafez, Iran[2]

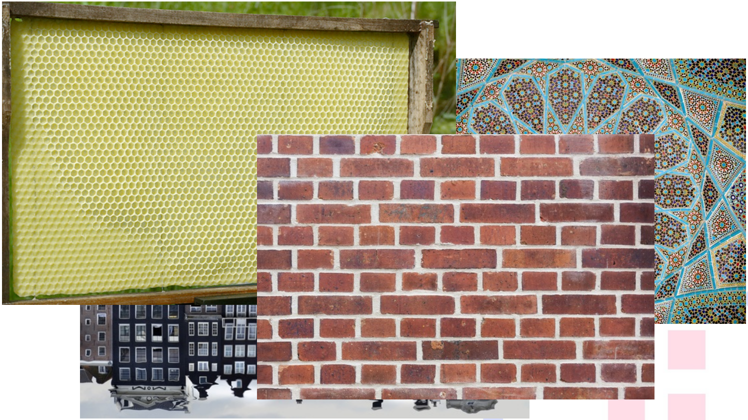
Exemples de symétries

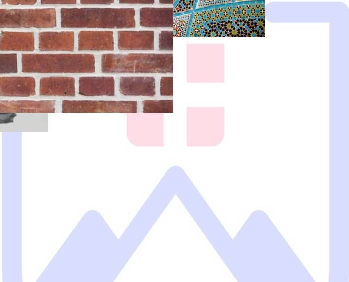




alvéoles d'abeilles[3]

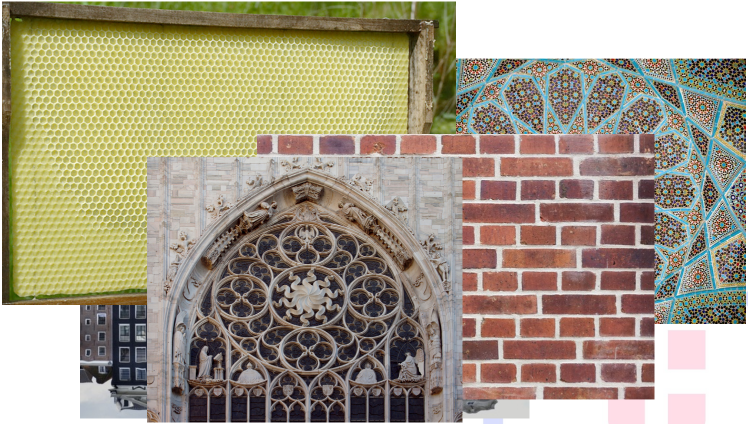
Exemples de symétries





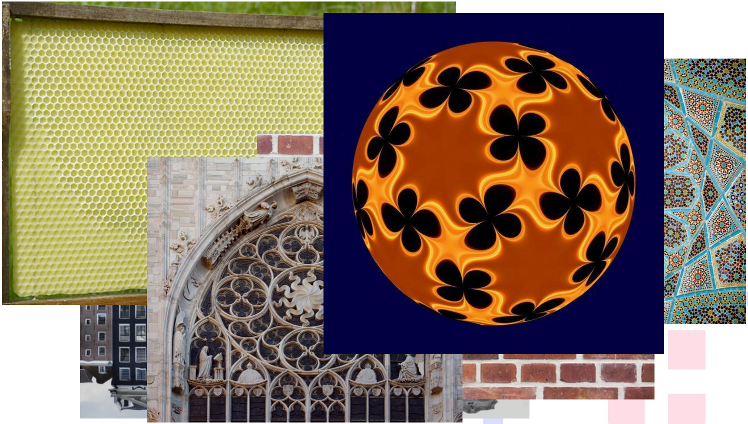
mur de briques[4]

Exemples de symétries



cathédrale de Milan[?]

Exemples de symétries

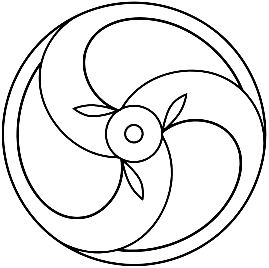


pavage de la sphère “532”

Plan

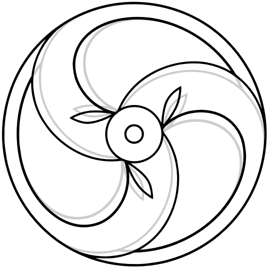
Plan

Rosaces et rotations



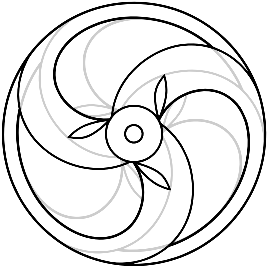
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



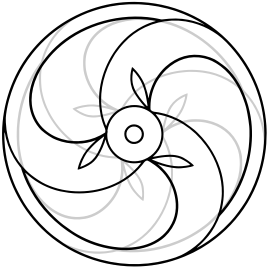
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



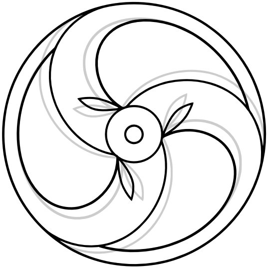
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



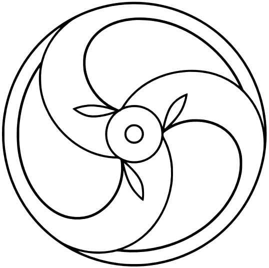
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



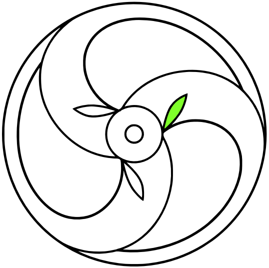
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



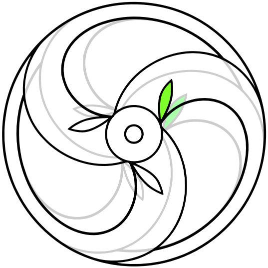
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.

Rosaces et rotations



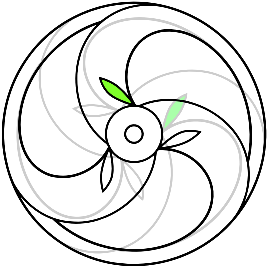
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



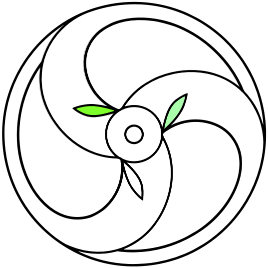
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



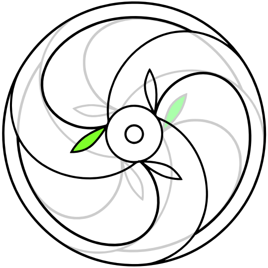
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



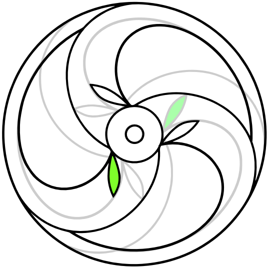
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



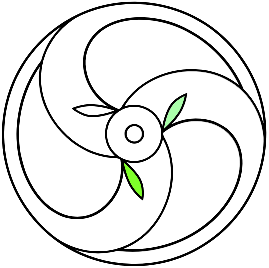
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



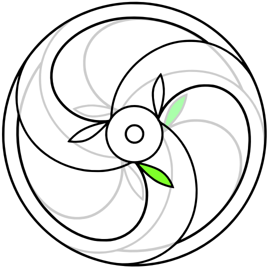
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



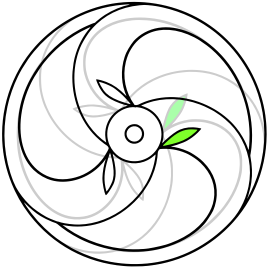
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



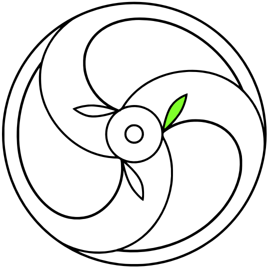
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



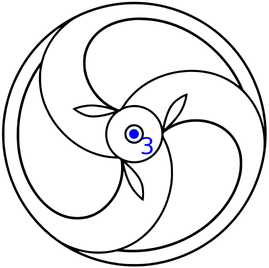
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



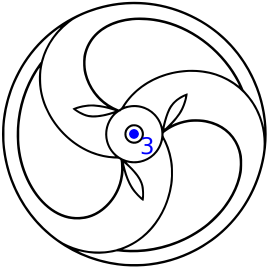
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.

Rosaces et rotations



- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

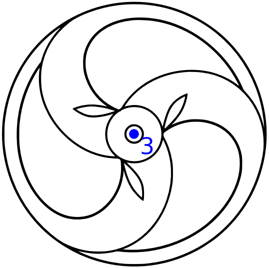
Rosaces et rotations



- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

Il y a en fait *3 actions* qui laissent la figure inchangée :

Rosaces et rotations

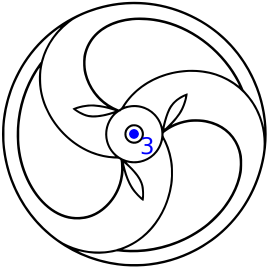


- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

Il y a en fait *3 actions* qui laissent la figure inchangée :

- r, la rotation d'un tiers de tour,

Rosaces et rotations

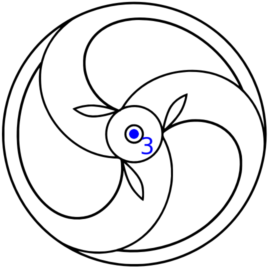


- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

Il y a en fait *3 actions* qui laissent la figure inchangée :

- r, la rotation d'un tiers de tour,
- $r; r$ (noté r^2), la rotation de deux tiers de tour,

Rosaces et rotations

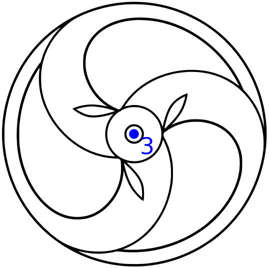


- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

Il y a en fait *3 actions* qui laissent la figure inchangée :

- r, la rotation d'un tiers de tour,
- $r; r$ (noté r^2), la rotation de deux tiers de tour,
- $r; r; r$ (noté r^3), la rotation d'un tour complet. Cette action ne fait rien !

Rosaces et rotations



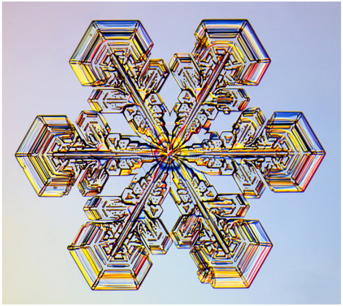
- La forme de cette spirale reste inchangée par *rotation*.
- En un tour, la spirale retrouve sa forme *3 fois*.
- On parle de *rotation d'ordre 3*.

Il y a en fait *3 actions* qui laissent la figure inchangée :

- r, la rotation d'un tiers de tour,
- $r; r$ (noté r^2), la rotation de deux tiers de tour,
- $r; r; r$ (noté r^3), la rotation d'un tour complet. Cette action ne fait rien !

L'action $r; r; r; r$ (noté r^4) est identique à r...

Rosaces et réflexions

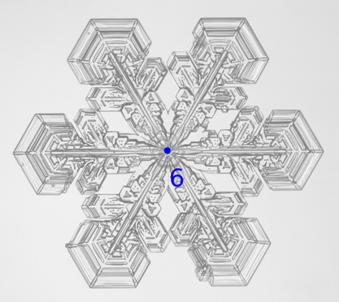


Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

Rosaces et réflexions

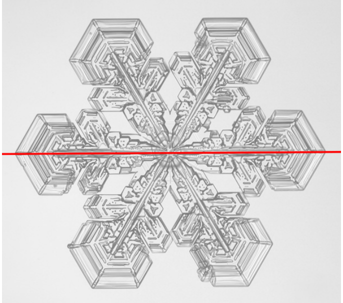
Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

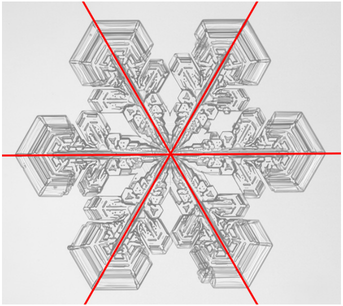
Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.

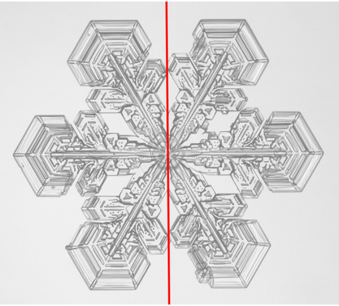
Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !

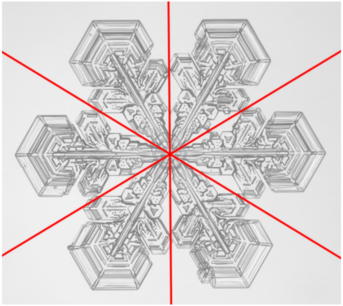
Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.

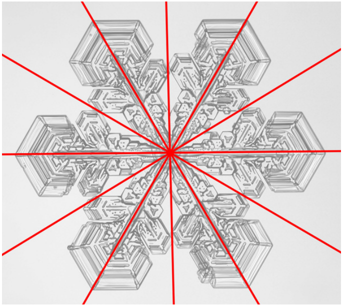
Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.

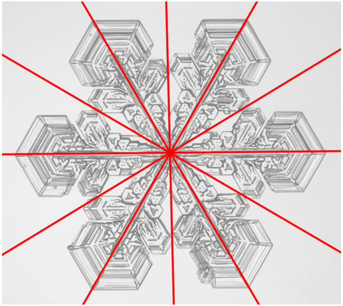
Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

Rosaces et réflexions

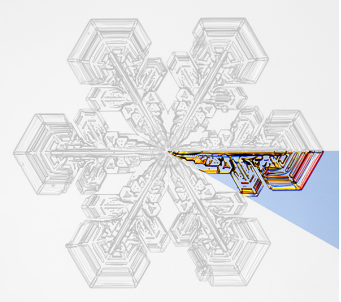


Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

La rotation d'un sixième de tour s'obtient en combinant les deux réflexions.

Rosaces et réflexions

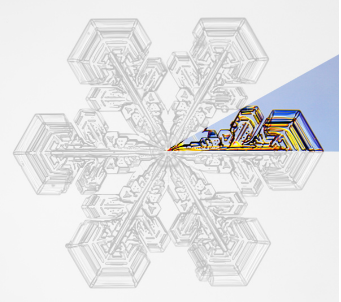


Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

La rotation d'un sixième de tour s'obtient en combinant les deux réflexions.

Rosaces et réflexions

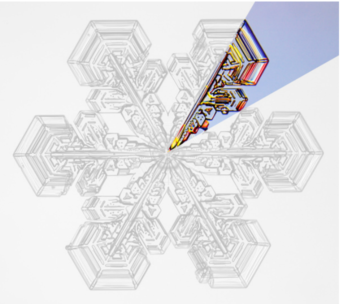


Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

La rotation d'un sixième de tour s'obtient en combinant les deux réflexions.

Rosaces et réflexions

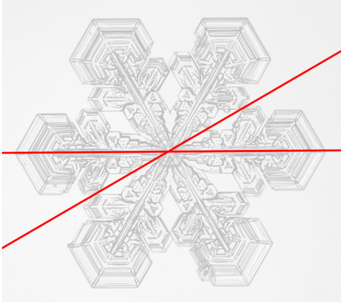


Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

La rotation d'un sixième de tour s'obtient en combinant les deux réflexions.

Rosaces et réflexions



Ce flocon[1] est invariant par une rotation d'ordre 6.

- Il y a en plus une *réflexion* : les parties hautes et basses sont similaires.
  Grâce à la rotation, il y a en fait trois *réflexions* !
- Il y a une autre réflexion : les parties gauches et droites sont similaires.
  Grâce à la rotation, elle donne 3 autres réflexions.
- Il y a donc un total de six *réflexions* !

La rotation d'un sixième de tour s'obtient en combinant les deux réflexions.

Au final, il y a exactement 12 actions qui laissent la figure inchangée : 1, r_1, r_2, r_1r_2, r_2r_1, $r_1r_2r_1$, $r_2r_1r_2$, $r_1r_2r_1r_2$, $r_2r_1r_2r_1$, $r_1r_2r_1r_2r_1$, $r_2r_1r_2r_1r_2$ et $r_1r_2r_1r_2r_1r_2 = r_2r_1r_2r_1r_2r_1$.

Classification des rosaces

Théorème

Il y a deux types de rosaces :

- *les rosaces avec rotation d'ordre N, notées* $N\bullet$
- *les rosaces avec réflexion d'ordre N, notées* $*N\bullet$

(N peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 1.)

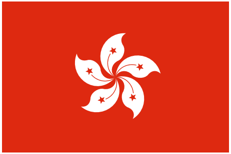
Classification des rosaces

Théorème

Il y a deux types de rosaces :

- *les rosaces avec rotation d'ordre N, notées N•*
- *les rosaces avec réflexion d'ordre N, notées ∗N•*

(N peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 1.)



5•

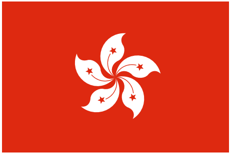
Classification des rosaces

Théorème

Il y a deux types de rosaces :

- *les rosaces avec rotation d'ordre N, notées N•*
- *les rosaces avec réflexion d'ordre N, notées ∗N•*

(N peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 1.)



5•

∗5•

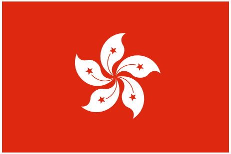
Classification des rosaces

Théorème

Il y a deux types de rosaces :

- *les rosaces avec <u>rotation</u> d'ordre N, notées N$\bullet$*
- *les rosaces avec <u>réflexion</u> d'ordre N, notées $*$N$\bullet$*

(N peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 1.)



5$\bullet$

$*$5$\bullet$

?

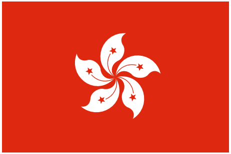
Classification des rosaces

Théorème

Il y a deux types de rosaces :

- *les rosaces avec rotation d'ordre N, notées* $N\bullet$
- *les rosaces avec réflexion d'ordre N, notées* $*N\bullet$

(N peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à 1.)



$5\bullet$

$*5\bullet$

$*1\bullet$

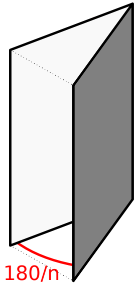
Kaléidoscopes rosaces

On peut (facilement ?) fabriquer un kaléidoscope de type $*n\bullet$:

Kaléidoscopes rosaces

On peut (facilement ?) fabriquer un kaléidoscope de type $*n\bullet$:

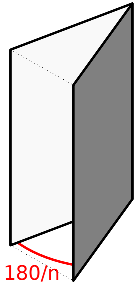
il suffit de positionner 2 miroirs à $\frac{180}{n}$ degrés...



Kaléidoscopes rosaces

On peut (facilement ?) fabriquer un kaléidoscope de type $*n\bullet$:

il suffit de positionner 2 miroirs à $\frac{180}{n}$ degrés...

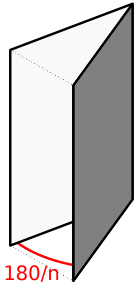


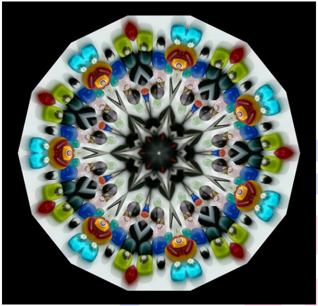
kaléidoscope $*7\bullet$

Kaléidoscopes rosaces

On peut (facilement ?) fabriquer un kaléidoscope de type $*n\bullet$:

il suffit de positionner 2 miroirs à $\frac{180}{n}$ degrés...





kaléidoscope $*7\bullet$

Plan

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Traces de pas dans la neige, campus Technolac.

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

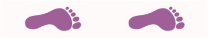
Un motif inchangé par une translation est toujours infini.

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.



Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

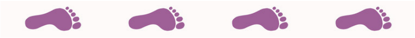
Un motif inchangé par une translation est toujours infini.

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.



Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.
*On parle de **frise**.*

Translations

En plus des rotations et des réflexions, nous ajoutons les translations.

Théorème

Un motif inchangé par une translation est toujours infini.
*On parle de **frise**.*

Remarque : si une translation laisse un motif inchangé, alors le motif reste inchangé par

- 2 fois cette translation,
- 3 fois cette translation,
- 4294967296 fois cette translation,
- etc.

Théorème

Le groupe des symétries d'une frise est infini.

... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par ...

... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par réflexion horizontale.

... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par réflexion horizontale.

- La suivante est inchangée par ...

... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par réflexion horizontale.

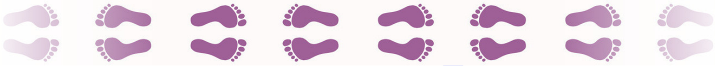
- La suivante est inchangée par réflexion verticale.

... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par réflexion horizontale.

- La suivante est inchangée par réflexion verticale.

- Celle là est inchangée par ...

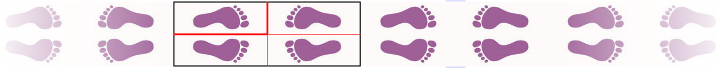


... et réflexions

- Cette frise est également inchangée par réflexion horizontale.

- La suivante est inchangée par réflexion verticale.

- Celle là est inchangée par réflexions horizontale et verticale.

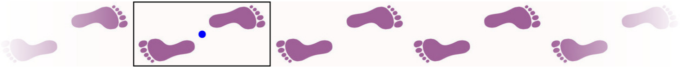


... et rotations

- La frise suivante est invariante par...

... et rotations

- La frise suivante est invariante par rotation d'ordre 2.



... et rotations

- La frise suivante est invariante par rotation d'ordre 2.

- La suivante est invariante par...

... et rotations

- La frise suivante est invariante par rotation d'ordre 2.

- La suivante est invariante par rotation et réflexion verticale.

... et rotations

- La frise suivante est invariante par rotation d'ordre 2.

- La suivante est invariante par rotation et réflexion verticale.

- Par quelle transformation cette dernière est elle invariante ?

... et rotations

- La frise suivante est invariante par rotation d'ordre 2.

- La suivante est invariante par rotation et réflexion verticale.

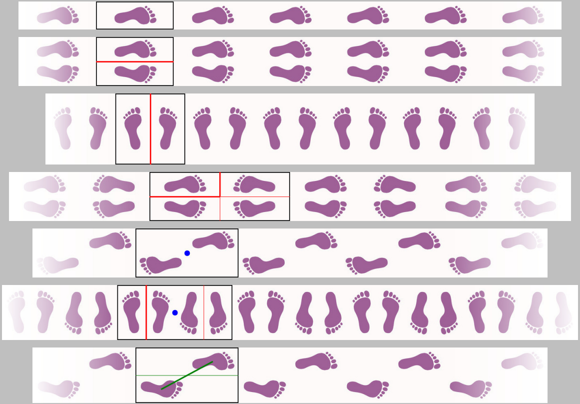
- Par quelle transformation cette dernière est elle invariante ?

Par une *réflexion glissée*.

Classification des frises

Théorème

Il n'y a que sept types de symétrie possibles pour les frises :



$(\infty\infty)$

$(\infty *)$

$(*\infty\infty)$

$(*22\infty)$

(22∞)

$(*\infty)$

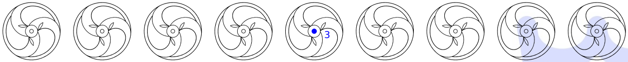
$(*\times)$

Mauvais exemples

Que penser de la frise suivante ?

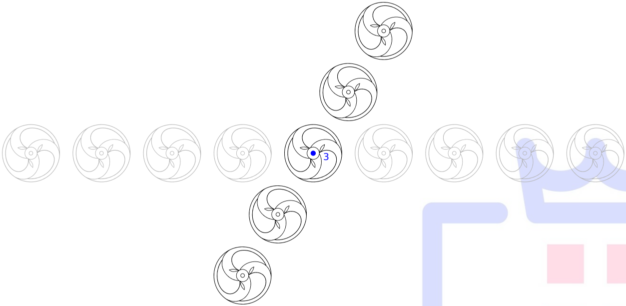
Mauvais exemples

Que penser de la frise suivante ?



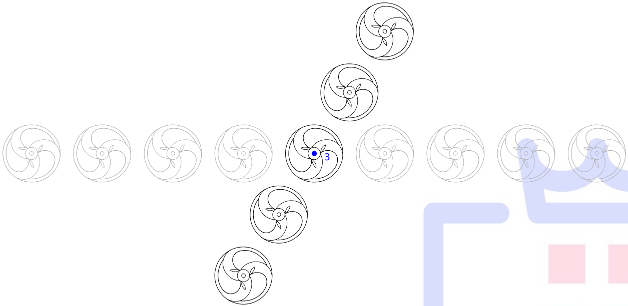
Mauvais exemples

Que penser de la frise suivante ?



Mauvais exemples

Que penser de la frise suivante ?



Le motif de base est inchangé par rotation, *mais pas la frise* !

Plan

Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...

Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...

Définition

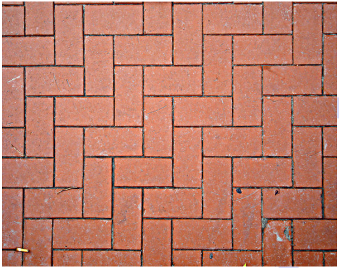
Un pavage périodique du plan est un motif infini qui se répète dans 2 directions différentes.

Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...

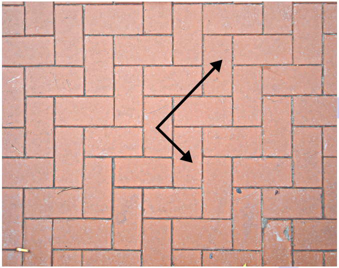


Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...

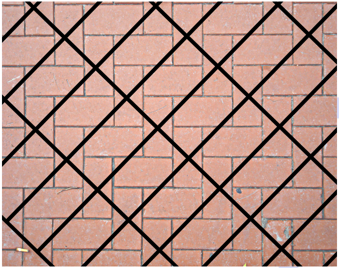


Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...



Pavages périodiques

Une frise (à une dimension) ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre différent de 2 (ou 1).

Il faudrait des frises à deux dimensions...

On les appelle parfois *papiers peints*...

Définition

Un pavage périodique du plan est un motif infini qui se répète dans 2 directions différentes.

Question

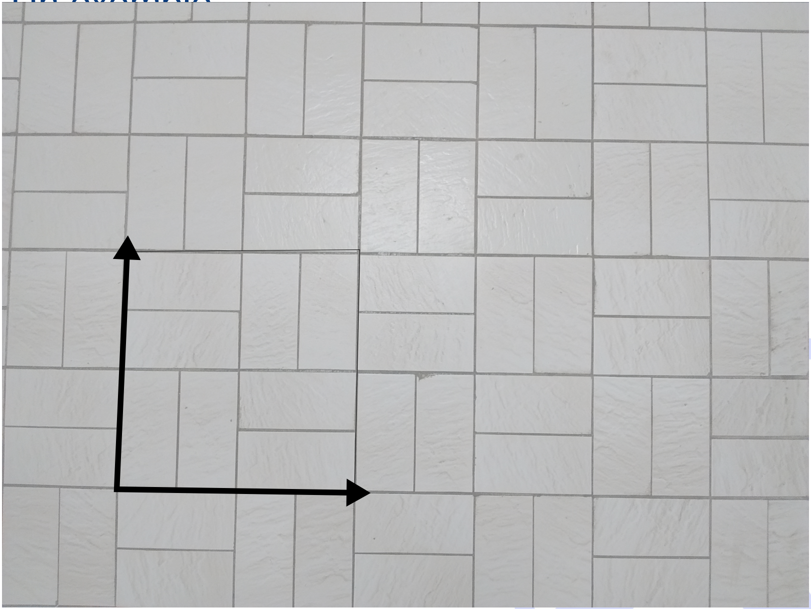
Quelles sont les symétries possibles pour un *pavage périodique du plan*?

Un exemple

Quelles symétries pour le pavage suivant ?

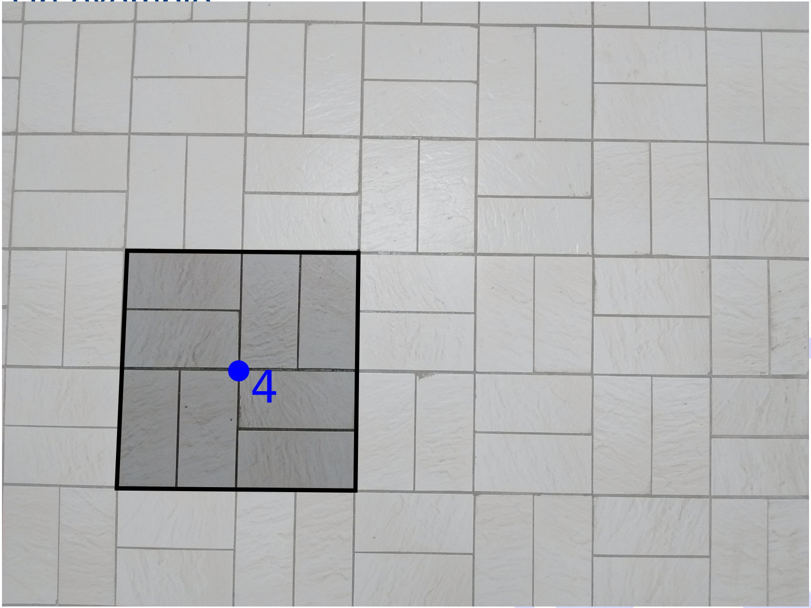
Un exemple

Un exemple

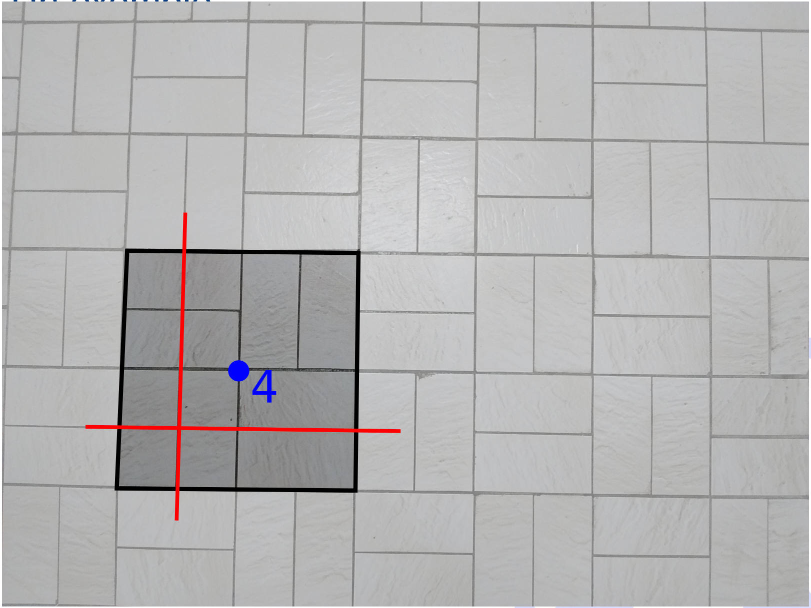


Un exemple

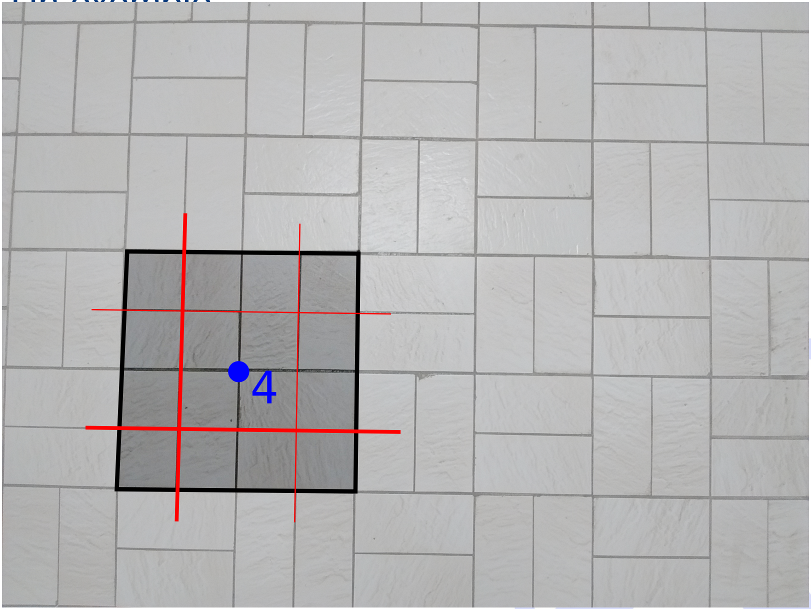
Un exemple



Un exemple

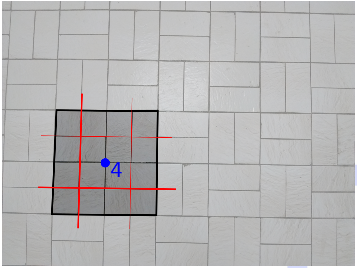


Un exemple



Un exemple

Quelles symétries pour le pavage suivant ?



Le *code* pour ce pavage est $4 * 2$.

Restriction cristallographique

Théorème

Les seules rotations possibles laissant un pavage périodique invariant sont les rotations d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6.

Restriction cristallographique

Théorème

Les seules rotations possibles laissant un pavage périodique invariant sont les rotations d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6.

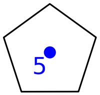
Corollaire

Les seules réflexions possibles laissant un pavage périodique invariant sont les points miroir d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6.

Restriction cristallographique — II

Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...

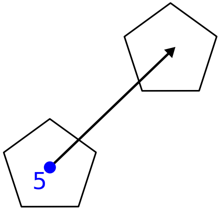
1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,



Restriction cristallographique — II

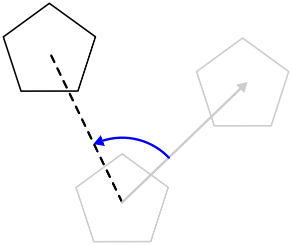
Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...

1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,
2. on choisit la plus petite translation qui laisse le motif inchangé,



Restriction cristallographique — II

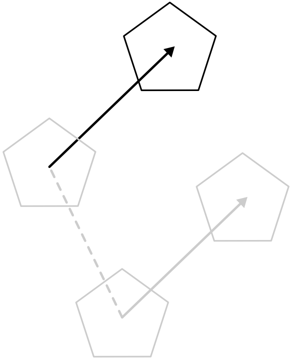
Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...



1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,
2. on choisit la plus petite translation qui laisse le motif inchangé,
3. on applique la rotation (1/5ème de tour) au motif translaté,

Restriction cristallographique — II

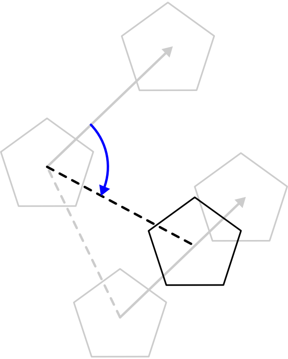
Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...



1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,
2. on choisit la plus petite translation qui laisse le motif inchangé,
3. on applique la rotation (1/5ème de tour) au motif translaté,
4. on translate le motif,

Restriction cristallographique — II

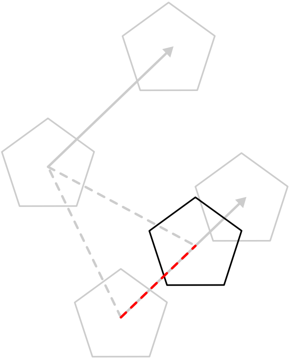
Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...



1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,
2. on choisit la plus petite translation qui laisse le motif inchangé,
3. on applique la rotation (1/5ème de tour) au motif translaté,
4. on translate le motif,
5. on applique la rotation à l'envers (1/5ème de tour) au motif translaté,

Restriction cristallographique — II

Voici par exemple la preuve qu'un pavage périodique ne peut pas avoir de centre de rotation d'ordre 5...

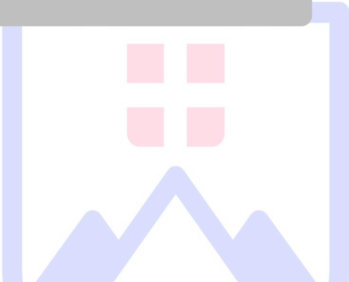


1. On raisonne par contradiction en supposant l'existence d'un centre de rotation d'ordre 5,
2. on choisit la plus petite translation qui laisse le motif inchangé,
3. on applique la rotation (1/5ème de tour) au motif translaté,
4. on translate le motif,
5. on applique la rotation à l'envers (1/5ème de tour) au motif translaté,
6. le motif final est plus proche que le motif initial !
   Contradiction.

Théorème

Théorème

Il n'existe que 17 groupes de symétries pour les pavages périodiques du plan :



Théorème

Théorème

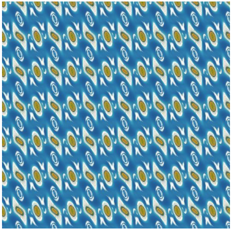
Il n'existe que 17 groupes de symétries pour les pavages périodiques du plan :

rotations	2222	442	333	632	
réflexions	$*2222$	$*442$	$*333$	$*632$	$**$
hybrides	$4*2$	$3*3$	$2*22$	$22*$	
autres	$*\times$	$\times\times$	$22\times$	$\circ$	

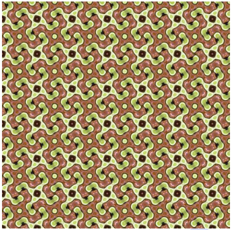
Code couleurs :

- **rotations**
- **réflexions**

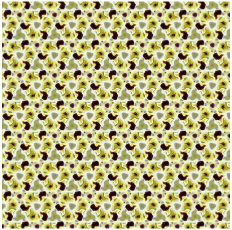
Rotations pures



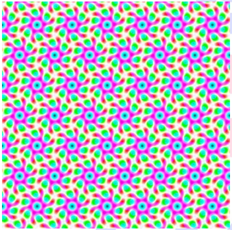
2222 (ditropique)



442 (tetratropique)

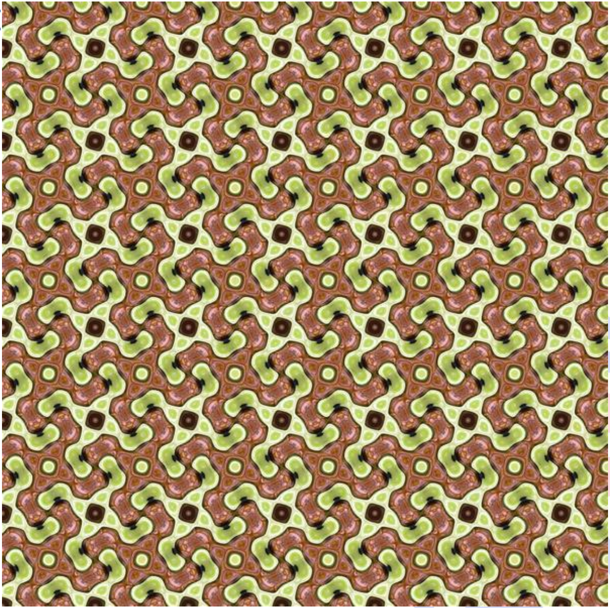


333 (tritropique)

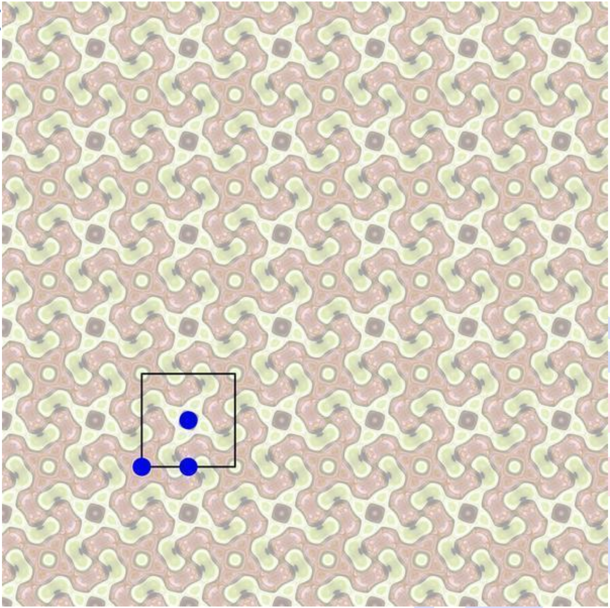


632 (hexatropique)

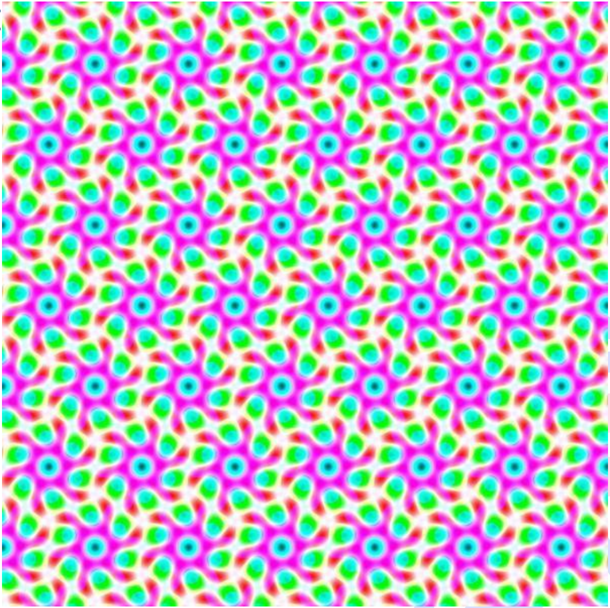
Rotat



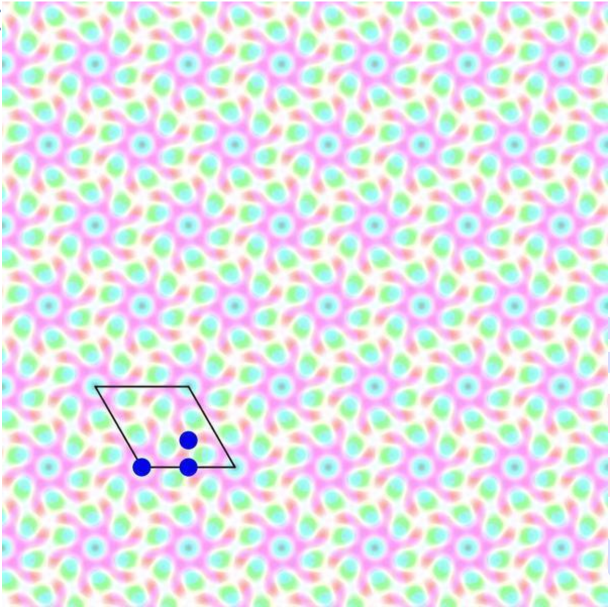
Rotat



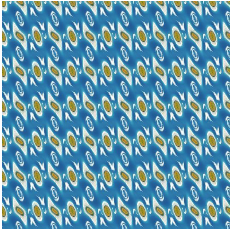
Rotat



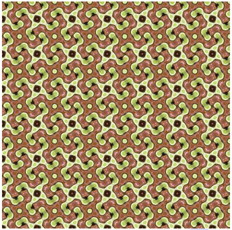
Rotat



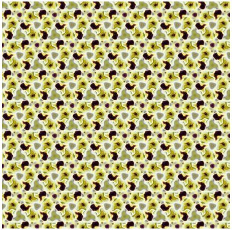
Rotations pures



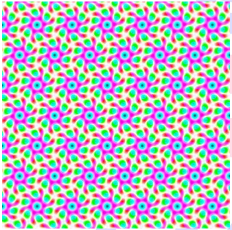
2222 (ditropique)



442 (tetratropique)

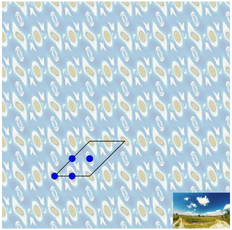


333 (tritropique)

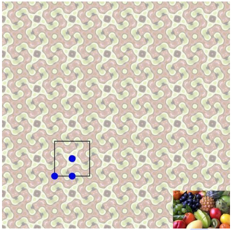


632 (hexatropique)

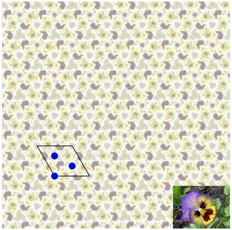
Rotations pures



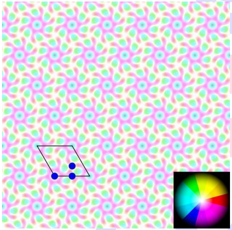
2222 (ditropique)



442 (tetratropique)

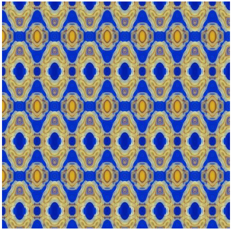


333 (tritropique)

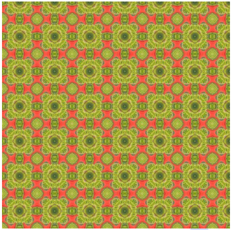


632 (hexatropique)

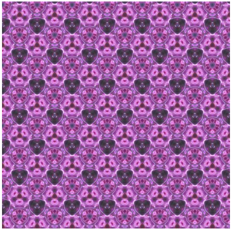
Réflexions pures



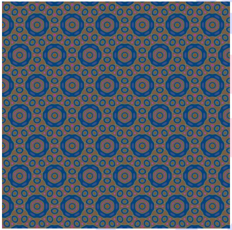
$*2222$ (discopique)



$*442$ (tetrascopique)

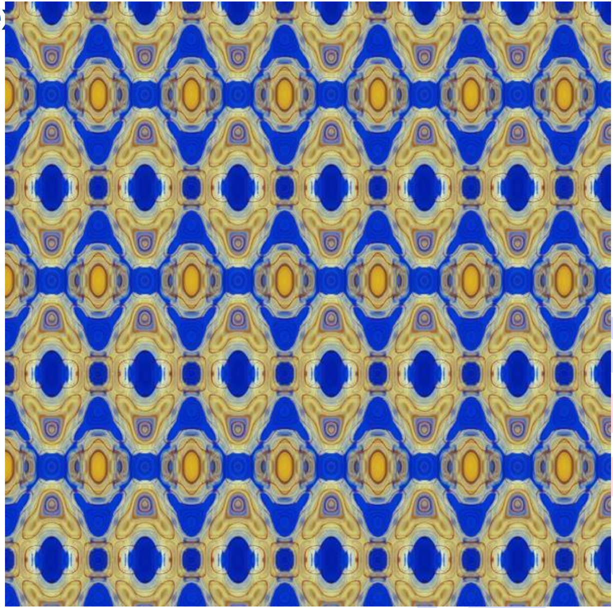


$*333$ (tritropique)

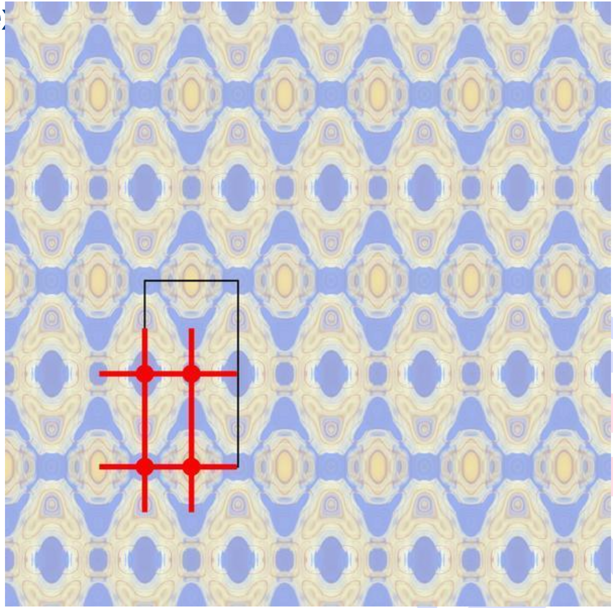


$*632$ (hexascopique)

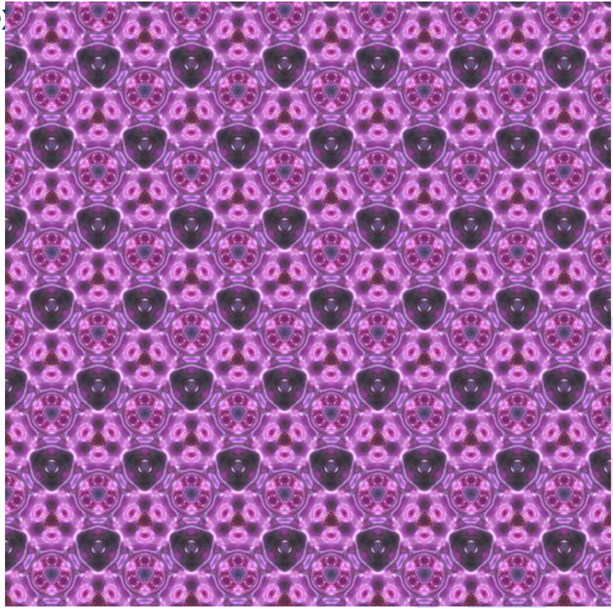
Réflex



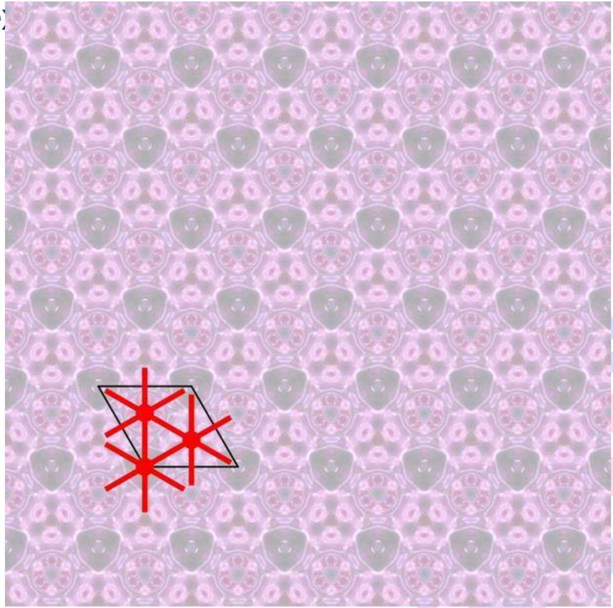
Réflex



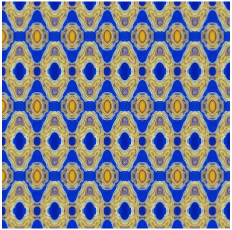
Réflex



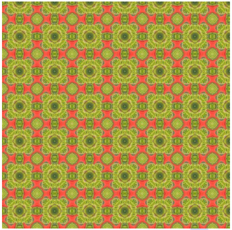
Réfle



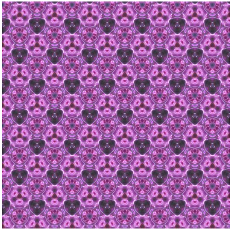
Réflexions pures



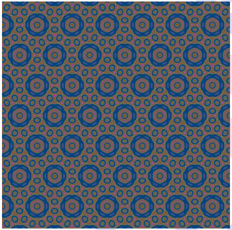
$*$2222 (discopique)



$*$442 (tetrascopique)

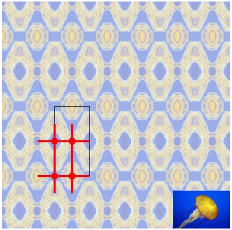


$*$333 (tritropique)

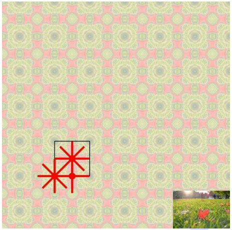


$*$632 (hexascopique)

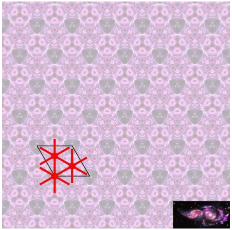
Réflexions pures



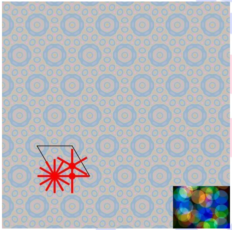
$*2222$ (discopique)



$*442$ (tetrascopique)

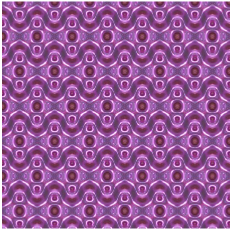


$*333$ (tritropique)

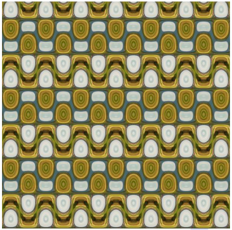


$*632$ (hexascopique)

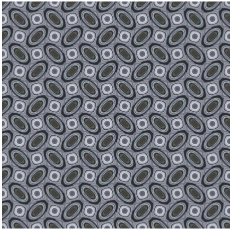
Mixtes



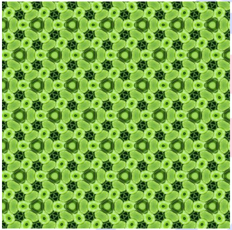
$2{*}22$ (dirhombique)



$22{*}$ (digyro)

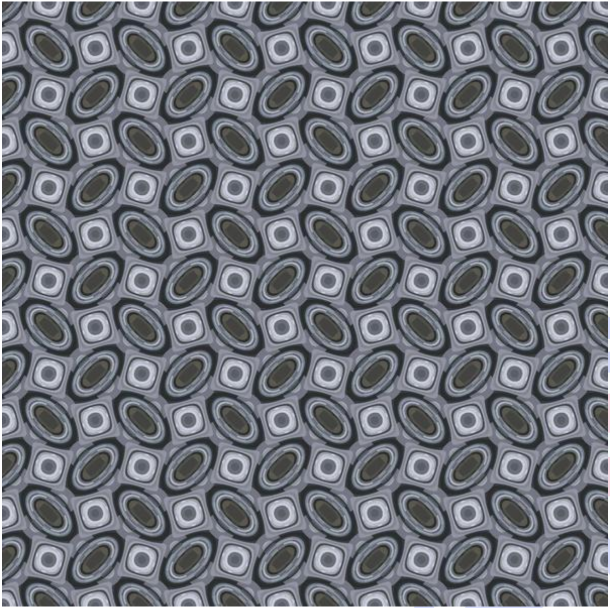


$4{*}2$ (tetragyro)

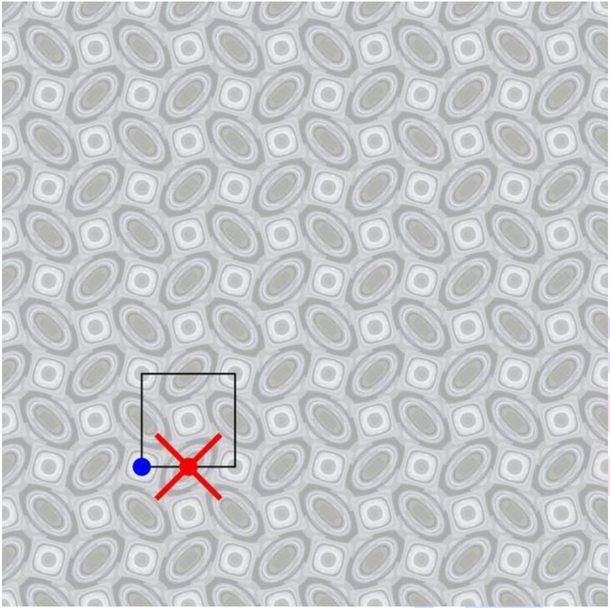


$3{*}3$ (trigyro)

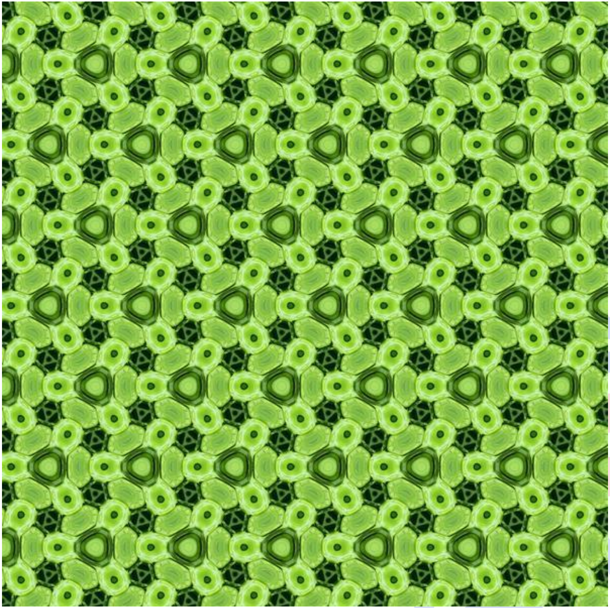
Mixte



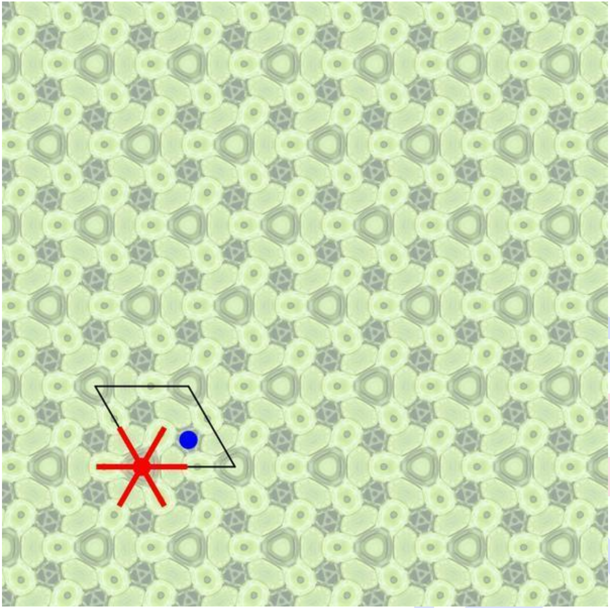
Mixte



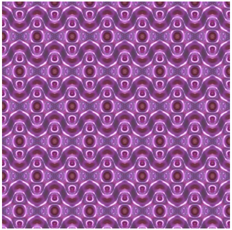
Mixte



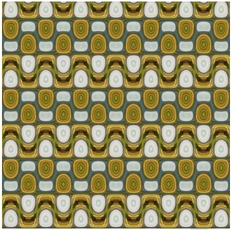
Mixte



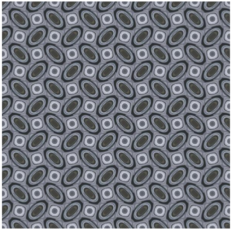
Mixtes



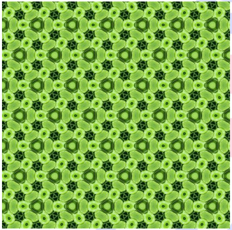
$2{*}22$ (dirhombique)



$22{*}$ (digyro)

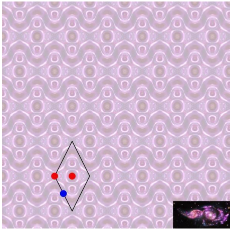


$4{*}2$ (tetragyro)

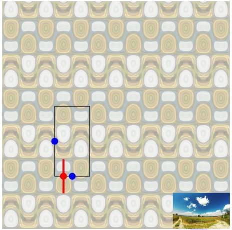


$3{*}3$ (trigyro)

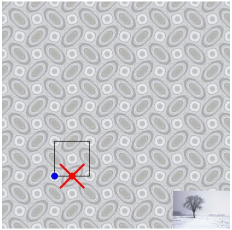
Mixtes



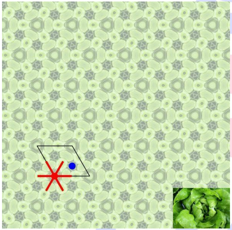
2∗22 (dirhombique)



22∗ (digyro)

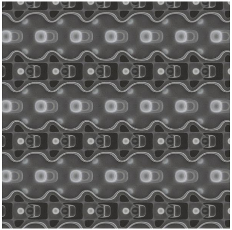


4∗2 (tetragyro)

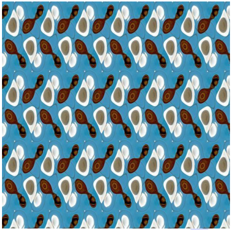


3∗3 (trigyro)

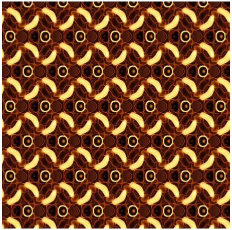
Les autres



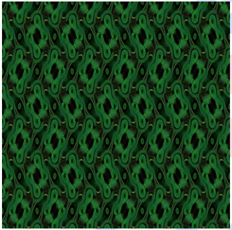
$**$ (monoscopic)



$\times\times$ (monoglisse)

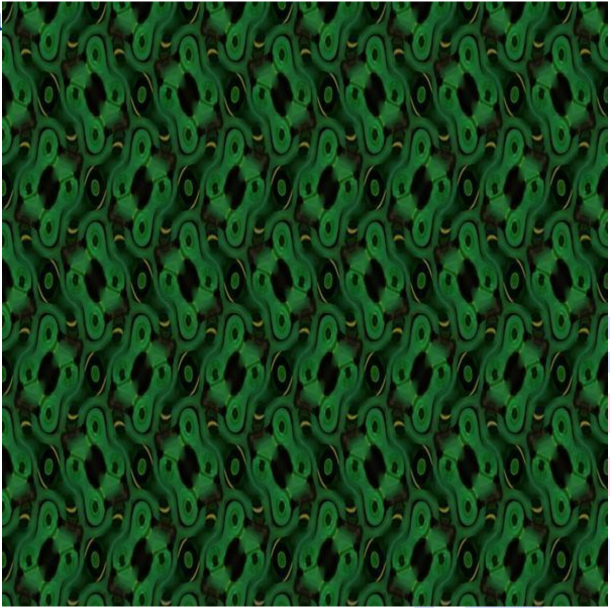


$*\times$ (monorhombique)

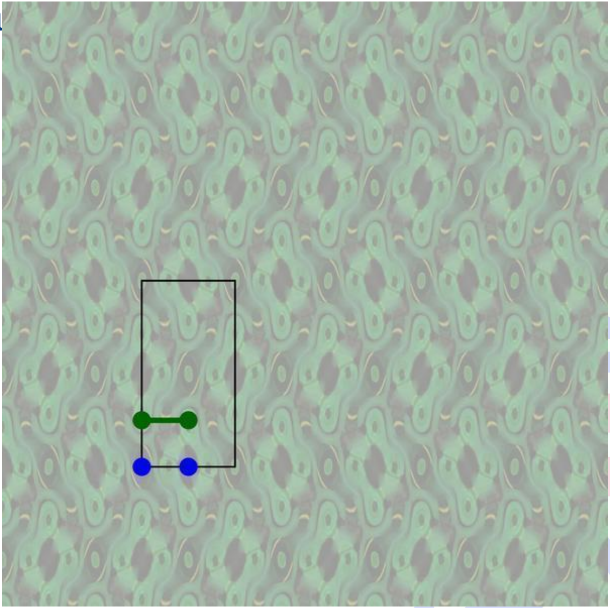


$22\times$ (diglisse)

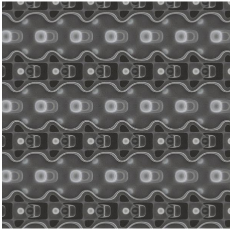
Les a



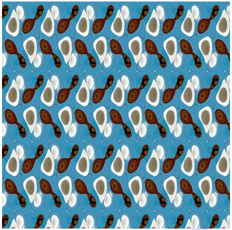
Les a



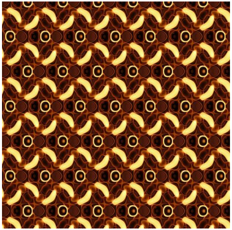
Les autres



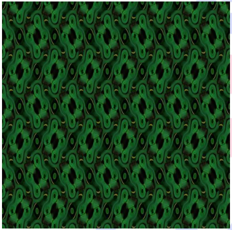
$\ast\ast$ (monoscopic)



$\times\times$ (monoglisse)

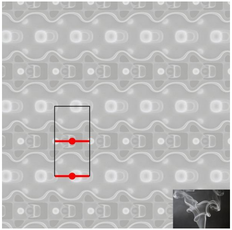


$\ast\times$ (monorhombique)

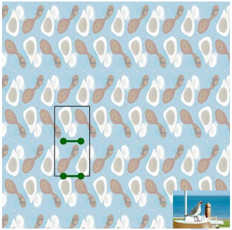


$22\times$ (diglisse)

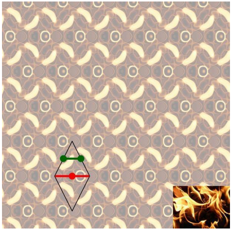
Les autres



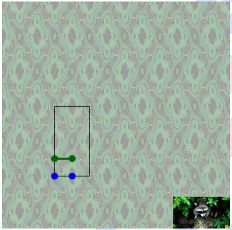
$\ast\ast$ (monoscopic)



$\times\times$ (monoglisse)



$\ast\times$ (monorhombique)



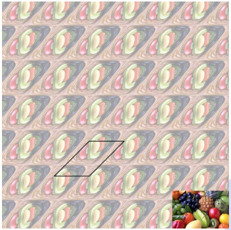
$22\times$ (diglisse)

Un dernier

∘ (monotropique)

Un de

Un dernier



○ (monotropique)

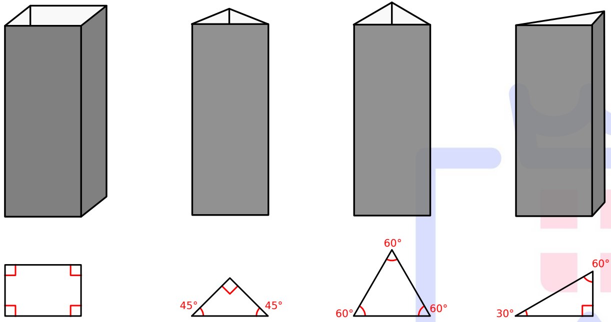
Kaléidoscopes plans

Les pavages que l'on peut obtenir par réflexions d'un motif fini sont $*2222$, $*442$, $*333$ et $*632$.

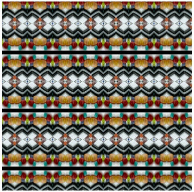
Kaléidoscopes plans

Les pavages que l'on peut obtenir par réflexions d'un motif fini sont $*2222$, $*442$, $*333$ et $*632$.

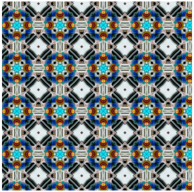
Les kaléidoscopes correspondants ont les formes suivantes :



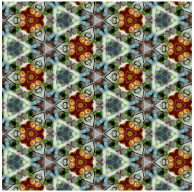
Kaléidoscopes plans : exemples



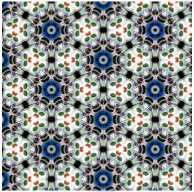
$*2222$



$*442$

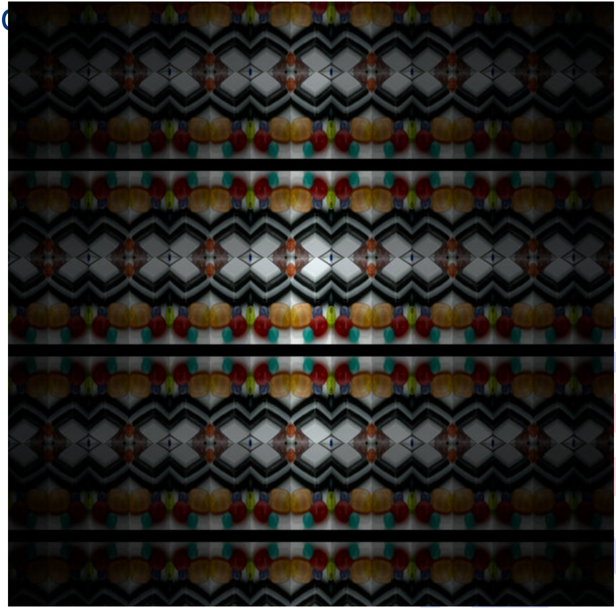


$*333$

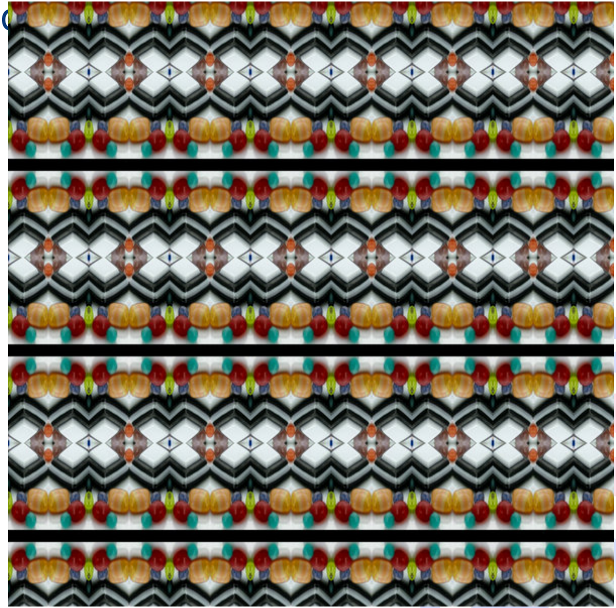


$*632$

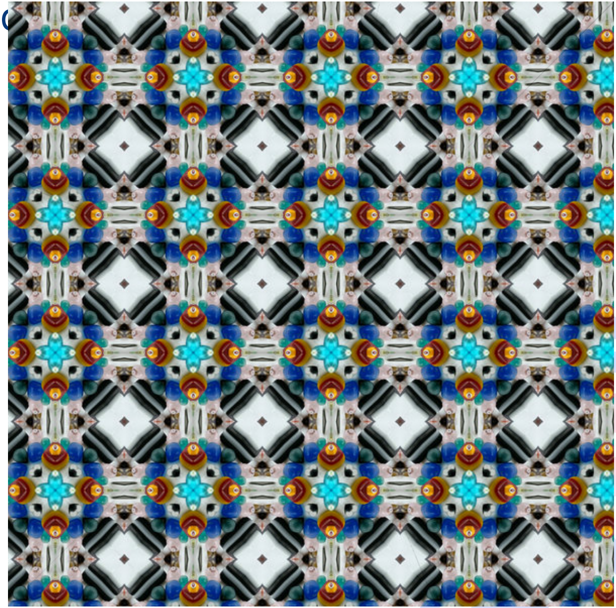
Kaléi



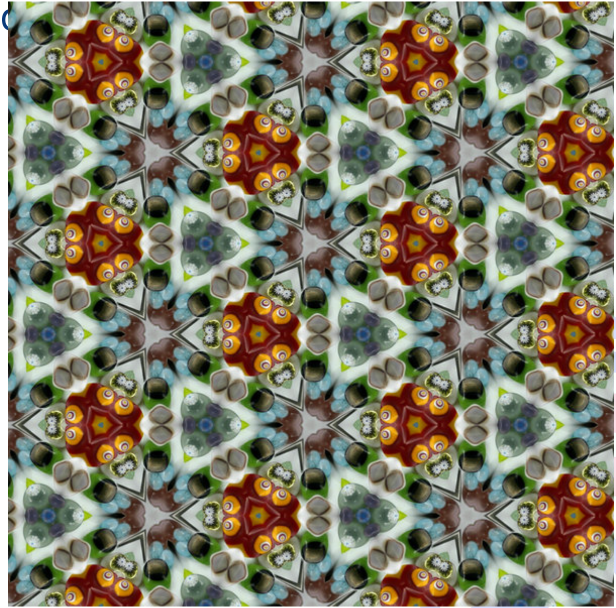
Kaléi



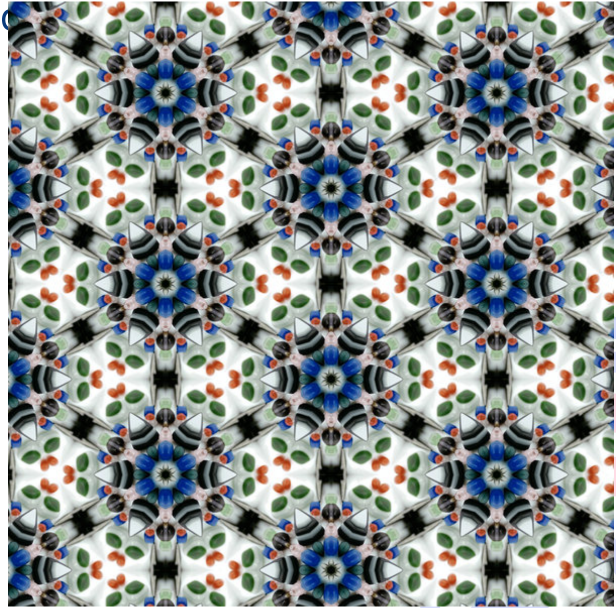
Kaléi



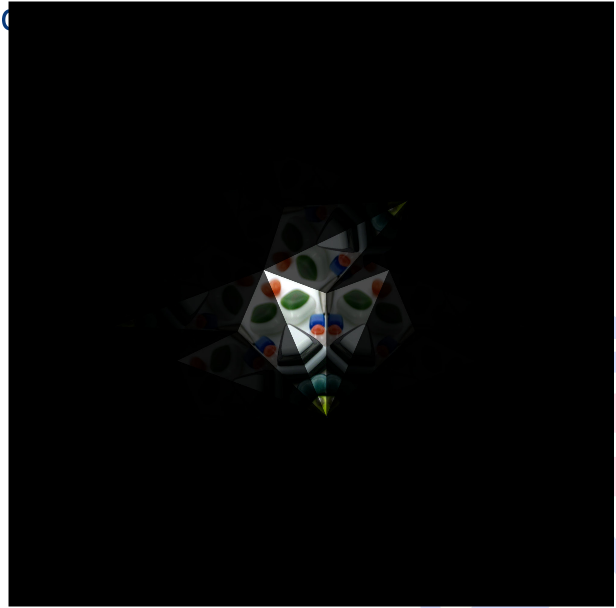
Kaléid



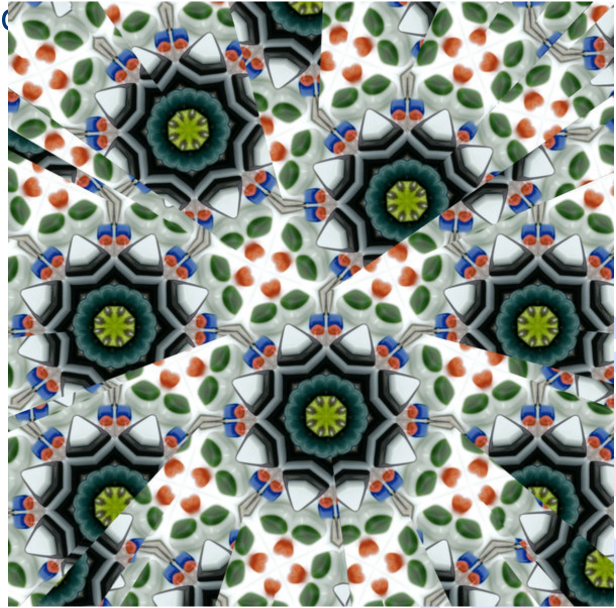
Kaléid



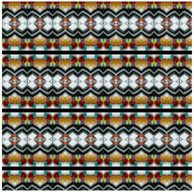
Kaléi



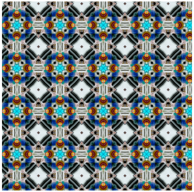
Kaléi



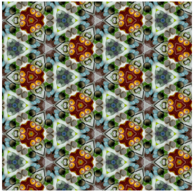
Kaléidoscopes plans : exemples



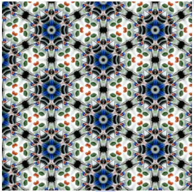
$*2222$



$*442$



$*333$

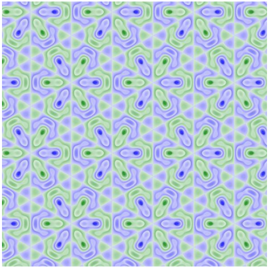


$*632$

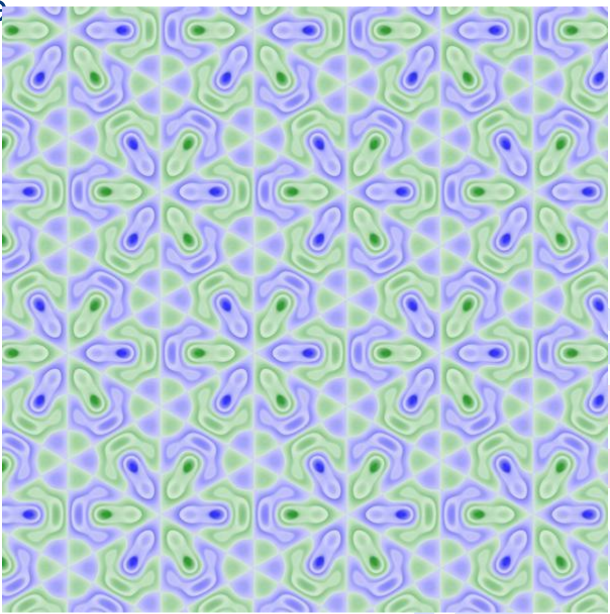
Avec une autre configuration, le résultat est décevant.

Piège

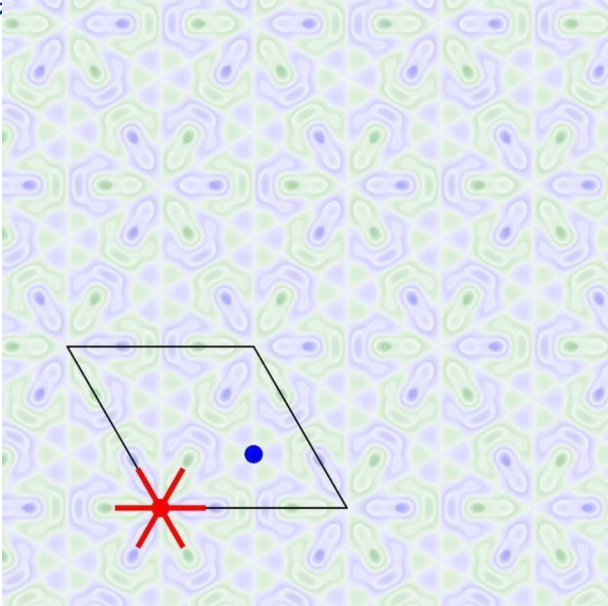
Quelles sont les symétries du pavage suivant ?



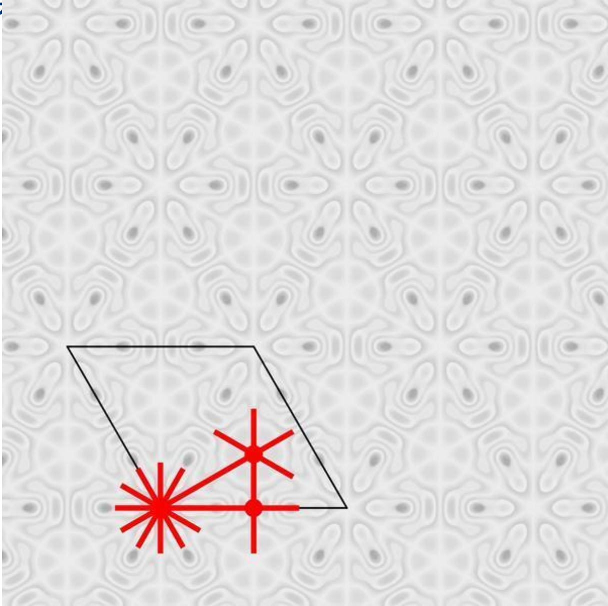
Piège



Piège

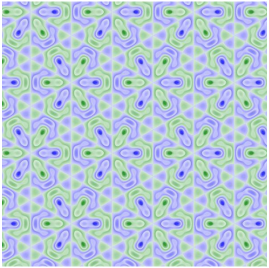


Piège



Piège

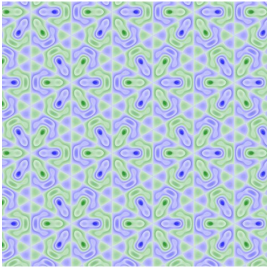
Quelles sont les symétries du pavage suivant ?



- avec couleurs : $3{*}3$
- sans couleurs : ${*}632$.

Piège

Quelles sont les symétries du pavage suivant ?



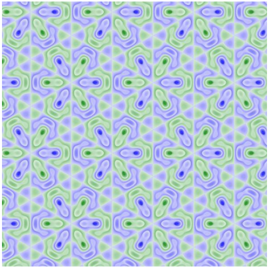
- avec couleurs : $3{*}3$
- sans couleurs : $*632$.

Théorème

Il y a exactement 46 combinaisons de types de symétries.

Piège

Quelles sont les symétries du pavage suivant ?



- avec couleurs : $3{\ast}3$
- sans couleurs : ${\ast}632$.

Théorème

Il y a exactement 46 combinaisons de types de symétries.

${\ast}632/3{\ast}3$, ${\ast}632/{\ast}333$, ${\ast}632/632$, $632/333$, ${\ast}442/{\ast}442$, ${\ast}442/4{\ast}2$, ${\ast}442/{\ast}2222$, ${\ast}442/2{\ast}22$, ${\ast}442/442$, $4{\ast}2/442$, $4{\ast}2/2{\ast}22$, $4{\ast}2/22{\times}$, $442/442$, $442/2222$, ${\ast}333/333$, $3{\ast}3/333$, ${\ast}2222/{\ast}2222$, ${\ast}2222/2{\ast}22$, ${\ast}2222/{\ast}{\ast}$, ${\ast}2222/22{\ast}$, ${\ast}2222/2222$, $2{\ast}22/22{\ast}$, $2{\ast}22/2222$, $2{\ast}22/{\ast}2222$, $2{\ast}22/{\ast}{\times}$, $2{\ast}22/22{\times}$, $22{\ast}/$, $22{\ast}$, $22{\times}$, ${\ast}{\ast}$, ${\times}{\times}$, $22{\times}/2222$, $22{\times}/{\times}{\times}$, $2222/2222$, $2222/\circ$, ${\ast}{\ast}/\circ$, ${\ast}{\ast}/{\ast}{\ast}_1$, ${\ast}{\ast}/{\ast}{\ast}_2$, ${\ast}{\ast}/{\ast}{\times}$, ${\ast}{\ast}/{\times}{\times}$, ${\ast}{\times}/{\ast}{\ast}$, ${\ast}{\times}/{\times}{\times}$, ${\ast}{\times}/\circ$, ${\times}{\times}/{\times}{\times}$, ${\times}{\times}/\circ$ et $\circ/\circ$.

Plan

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Le code correspondant est donc $*532$.

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Le code correspondant est donc $*532$.

Théorème

Il y a exactement 14 types de symétries possibles sur la sphère.

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Le code correspondant est donc $*532$.

Théorème

Il y a exactement 14 types de symétries possibles sur la sphère.

rotations	532	432	332
réflexions	$*532$	$*432$	$*332$
hybrides	$3*2$		

Un peu de sport

Quelles symétries pour ce ballon de foot ?

Le code correspondant est donc $*532$.

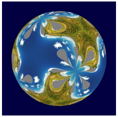
Théorème

Il y a exactement 14 types de symétries possibles sur la sphère.

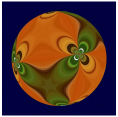
rotations	532	432	332				
réflexions	$*532$	$*432$	$*332$				
hybrides	$3*2$						
autres	NN	$*NN$	$22N$	$*22N$	$2*N$	$N*$	$N\times$

où N est un entier positif

Exemples



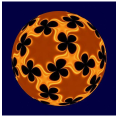
332



$*332$

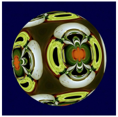
432

$*432$

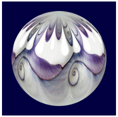


532

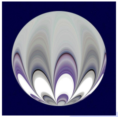
$*532$



$3{*}2$

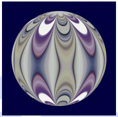


NN $(N = 5)$

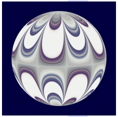


$*NN$ $(N = 5)$

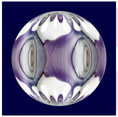
$22N$ $(N = 5)$



$*22N$ $(N = 5)$



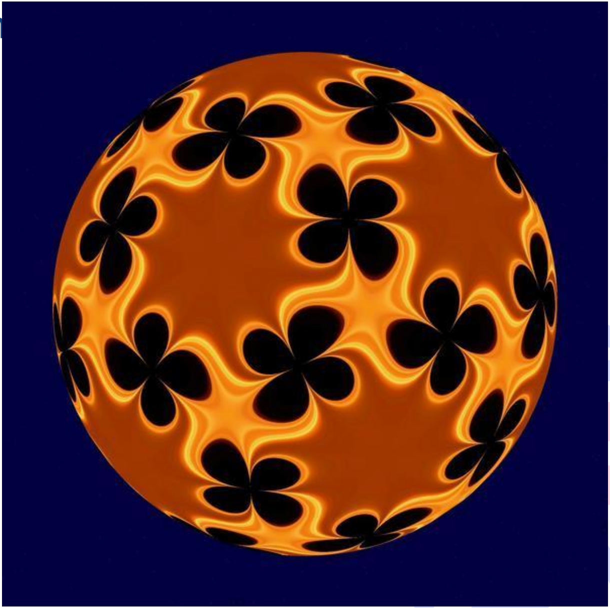
$2{*}N$ $(N = 5)$



$N*$ $(N = 5)$

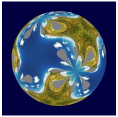
$N\times$ $(N = 5)$

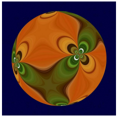
Exem



Exem

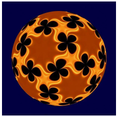
Exemples


332

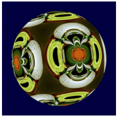

$*332$

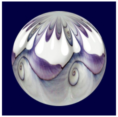

432

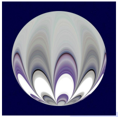

$*432$


532

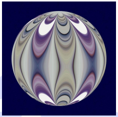

$*532$

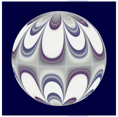

$3*2$

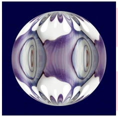

NN ($N = 5$)


$*NN$ ($N = 5$)


$22N$ ($N = 5$)


$*22N$ ($N = 5$)


$2*N$ ($N = 5$)


$N*$ ($N = 5$)


$N\times$ ($N = 5$)

Kaléidoscopes sphériques

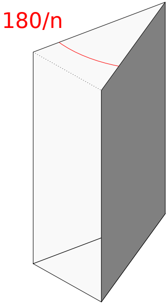
Les pavages de la sphère que l'on peut obtenir par réflexions d'un motif fini sont $*22N$, $*332$, $*432$ et $*532$.

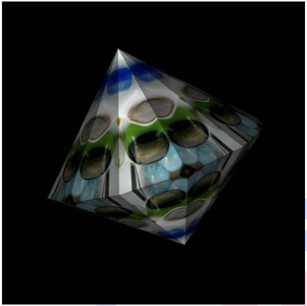
Kaléidoscopes sphériques

Les pavages de la sphère que l'on peut obtenir par réflexions d'un motif fini sont $*22N$, $*332$, $*432$ et $*532$.

Pour $*22N$, il faut ajouter un miroir à un kaléidoscope "rosace".

Kaléidoscopes sphériques



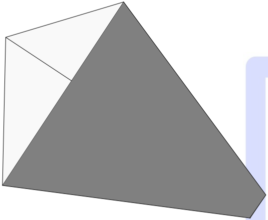


kaléidoscope $22n$ ($n = 7$)

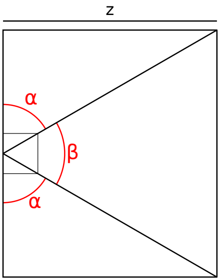
Kaléidoscopes sphériques

Les pavages de la sphère que l'on peut obtenir par réflexions d'un motif fini sont $*22N$, $*332$, $*432$ et $*532$.

Pour $*22N$, il faut ajouter un miroir à un kaléidoscope "rosace".
Les autres kaléidoscopes ont une forme de pyramide :

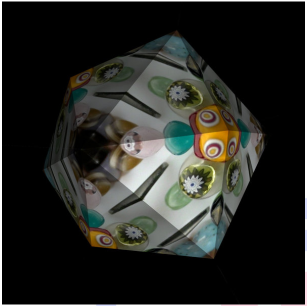


Kaléidoscopes sphériques



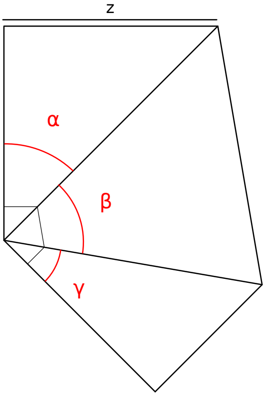
$\alpha = 54.74°$ $\beta = 70.53°$

kaléidoscope sphérique *332



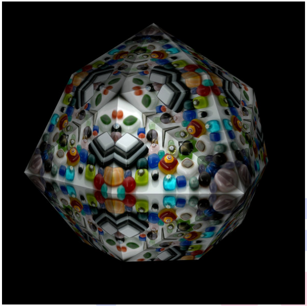
kaléidoscope $*332$

Kaléidoscopes sphériques



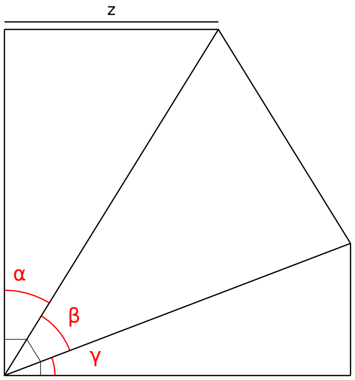
$\alpha = 45°$ $\beta = 54.74°$ $\gamma = 35.26°$

kaléidoscope sphérique *432



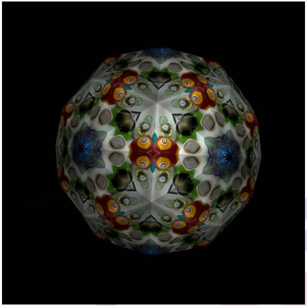
kaléidoscope $*432$

Kaléidoscopes sphériques



α = 31.72° β = 37.38° γ = 20.90°

kaléidoscope sphérique *532



kaléidoscope $*532$

Plan

1. Rosaces
2. Frises
3. Le plan
4. La sphère
5. Pavages apériodiques

Définition

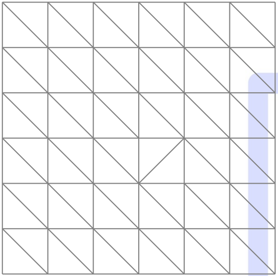
Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

Définition

Définition

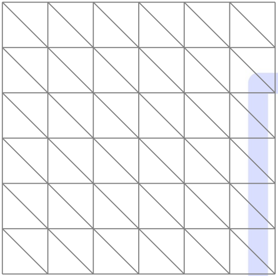
Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.



Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.



Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

Un pavage est apériodique si ces tuiles ne peuvent former que des pavages non périodiques.

Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

Un pavage est apériodique si ces tuiles ne peuvent former que des pavages non périodiques.

- Berger (1966) : 20426 tuiles

Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

Un pavage est apériodique si ces tuiles ne peuvent former que des pavages non périodiques.

- Berger (1966) : 20426 tuiles
- Berger : 104 tuiles

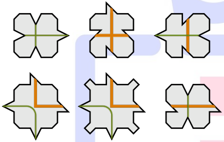
Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

Un pavage est apériodique si ces tuiles ne peuvent former que des pavages non périodiques.

- Berger (1966) : 20426 tuiles
- Berger : 104 tuiles
- Robinson (1971) : 6 tuiles



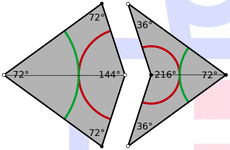
Définition

Définition

Un pavage (constitué de tuiles) est non périodique s'il n'est invariant par aucune translation.

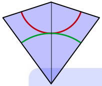
Un pavage est apériodique si ces tuiles ne peuvent former que des pavages non périodiques.

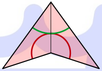
- Berger (1966) : 20426 tuiles
- Berger : 104 tuiles
- Robinson (1971) : 6 tuiles
- Penrose (1979) : 2 tuiles



Pavages de Penrose

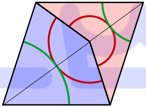
- deux tuiles


cerf-volant


fléchette

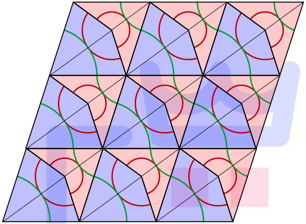
Pavages de Penrose

- deux tuiles
- condition de raccordement



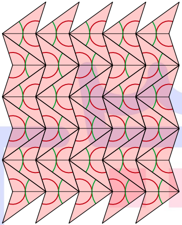
Pavages de Penrose

- deux tuiles
- condition de raccordement



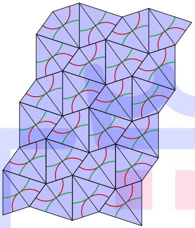
Pavages de Penrose

- deux tuiles
- condition de raccordement

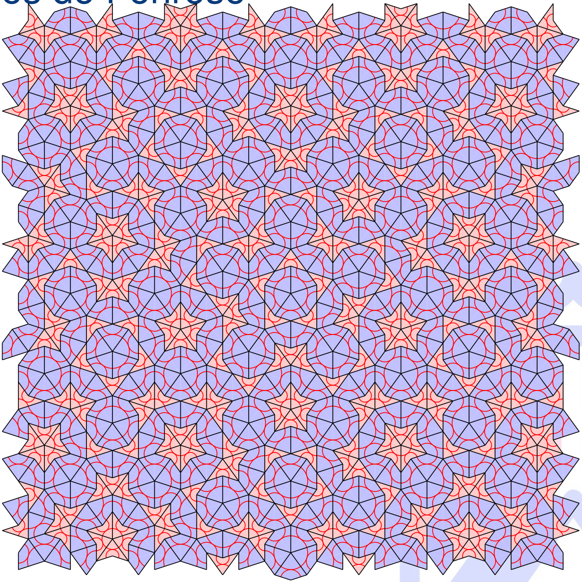


Pavages de Penrose

- deux tuiles
- condition de raccordement



Pavages de Penrose



Références

- John H. Conway, Heidi Burgiel, Chaim Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, AK Peters, 2008.
- Frank A. Farris, *Creating Symmetry, the artful mathematics of wallpaper patterns*, Princeton University Press, 2012.
- Martin Gardner, “Extraordinary non-periodic tiling that enriches the theory of tiles”, Scientific American, janvier 1977 (n 236, pages 110–121), `https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/pubs/focus/Gardner_PenroseTilings1-1977.pdf`
- Jean-Paul Delahaye, “La quête du pavé apériodique unique”, Pour la science, novembre 2013 (n 240), `http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/2013/240.pdf`
- Jean-Paul Delahaye, “Les pavages pentagonaux : une classification qui s’améliore”, Pour la science, octobre 2013 (n 239) `http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/2013/239.pdf`
- Pierre Hyvernat, `create_symmetry`, programme pour générer des pavages, `http://github.com/phyver/create_symmetry`

Contact

email : pierre.hyvernat@univ-smb.fr
internet : http://www.lama.univ-smb.fr/~hyvernat

Compléments, diaporama, images des pavages
et kaléidoscopes, etc.

goo.gl/P59JiF

Images externes

[1] Flocon de neige, Kenneth G. Libbrecht, http://snowcrystals.com/

[2] Mausolée de Hafez, Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Girih_tiles

[3] Alvéoles d'abeilles, Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb

[4] Mur de briques, pxhere (bibliothèque d'images gratuite), https://pxhere.com/fr/photo/826975

[5] Papillon, pxhere (bibliothèque d'images gratuite), https://pxhere.com/en/photo/820843

[6] Amsterdam, pxhere (bibliothèque d'images gratuite), https://pxhere.com/fr/photo/684698

[7] Roue, pxhere (bibliothèque d'images gratuite), https://pixabay.com/en/car-vehicle-transportation-system-3051036/

[8] Drapeau de Hong Kong, Wikipedia, https://fr.wikipedia.org/wiki/Drapeau_de_Hong_Kong

[9] Pavés à Budapest, Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wallpaper_group-pgg-2.jpg