La science des jeux
entre mathématiques et informatique

Conférence « Amphis pour tous »

Pierre Hyvernat (pierre.hyvernat@univ-savoie.fr)

Laboratoire de mathématiques, université de Savoie

Janvier 2010

LAMA
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

Plan

1. Quoi, comment, qui et quand ?
2. Informatique et mathématique
3. Deux variantes de « sprouts »
4. Structure des jeux

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs

- noir et blanc,
- rouge et bleu,
- Alice et Bob,
- ...

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs
  1. le jeu de go,

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs
  1. le jeu de go,
  2. jeu d'échec,

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs
  1. le jeu de go,
  2. jeu d'échec,
  3. jeu de dame,

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

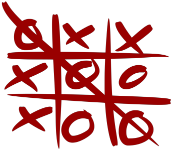
- de jeux stratégiques
- à deux joueurs
  1. le jeu de go,
  2. jeu d'échec,
  3. jeu de dame,
  4. puissance 4,

Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs

  1. le jeu de go,
  2. jeu d'échec,
  3. jeu de dame,
  4. puissance 4,
  5. morpion...

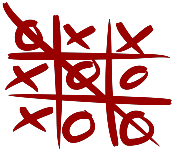


Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs

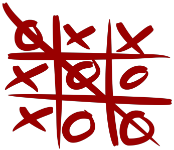
1. le morpion,
2. puissance 4,
3. jeu de dame,
4. jeu d'échec,
5. jeu de go.



Quoi ?

de quoi va t'on parler ?

- de jeux stratégiques
- à deux joueurs
    1. le morpion,
    2. puissance 4,
    3. jeu de dame,
    4. jeu d'échec,
    5. jeu de go.



de quoi ne va t'on pas parler ?

- de jeux « économiques » (théorie des jeux, enchères, collaboration, ...)
- de chance (roulette, belote, poker...)
- de sport (football, ...)
- de jeux vidéos ...

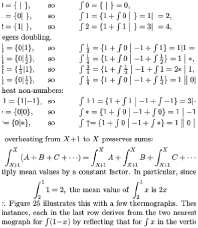
Comment ?

La nature des jeux permet d'utiliser des ordinateurs,

Comment ?

La nature des jeux permet d'utiliser des ordinateurs,

et des mathématiques !



$= \{\,|\,\}$, so $\int 0 = \{\,|\,\} = 0$,

$= \{0|\,\}$, so $\int 1 = \{1 + \int 0 \mid \} = 1| = 2$,

$= \{1|\,\}$, so $\int 2 = \{1 + \int 1 \mid \} = 3| = 4$,

egers doubling.

$= \{0|1\}$, so $\int \frac{1}{2} = \{1 + \int 0 \mid -1 + \int 1\} = 1|1 =$

$= \{0|\frac{1}{2}\}$, so $\int \frac{1}{4} = \{1 + \int 0 \mid -1 + \int \frac{1}{2}\} = 1 \mid *$,

$= \{\frac{1}{2}|1\}$, so $\int \frac{3}{4} = \{1 + \int \frac{1}{2} \mid -1 + \int 1 = 2* \mid 1$,

$= \{0|\frac{1}{4}\}$, so $\int \frac{1}{8} = \{1 + \int 0 \mid -1 + \int \frac{1}{4}\} = 1 \,\|\, 0|$

heat non-numbers:

$1 = \{1|-1\}$, so $\int \pm 1 = \{1 + \int 1 \mid -1 + \int -1\} = 3|$

$= \{0|0\}$, so $\int * = \{1 + \int 0 \mid -1 + \int 0\} = 1 \mid -1$

$= \{0|*\}$, so $\int \uparrow = \{1 + \int 0 \mid -1 + \int *\} = 1 \,\|\, 0 \mid$

overheating from $X+1$ to X preserves sums:

$$\int_{X+1}^{X} (A + B + C + \cdots) = \int_{X+1}^{X} A + \int_{X+1}^{X} B + \int_{X+1}^{X} C + \cdots$$

tiply mean values by a constant factor. In particular, since

$$\int_2^1 1 = 2, \text{ the mean value of } \int_2^1 x \text{ is } 2x$$

. Figure 25 illustrates this with a few thermographs. Thes instance, each in the last row derives from the two nearest mograph for $\int(1-x)$ by reflecting that for $\int x$ in the verti

Qui et quand ?

- Charles Léonard Bouton étudie le « jeu de Nim » (ou « jeu des allumettes ») en 1900 :

The number of safe combinations in the same case is

$$\frac{(2^{n-1}-1)(2^n-1)}{3}$$

Hence the chance of a safe combination's being placed upon the table at first is

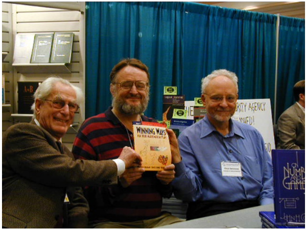
$$\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}(2^n+1)},$$

and this is the chance that the second player should win. The chances of the first player's winning are to those of the second as

$$2^n + 2 + \frac{3}{2^{n-1}-1} \quad \text{to} \quad 1,$$

Qui et quand ?

- Charles Léonard Bouton étudie le « jeu de Nim » (ou « jeu des allumettes ») en 1900 :
- John Horton Conway, Richard Guy et Elwyn Berlekamp popularisent le domaine à la fin des années 70,



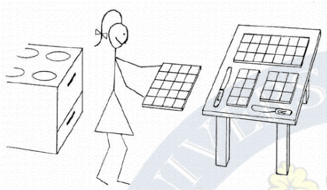


Figure 3. Ready for a Game of Cutcake.

Qui et quand ?

- Charles Léonard Bouton étudie le « jeu de Nim » (ou « jeu des allumettes ») en 1900 :
- John Horton Conway, Richard Guy et Elwyn Berlekamp popularisent le domaine à la fin des années 70,
- de nombreux joueurs ont continué...

Qui et quand ?

- Charles Léonard Bouton étudie le « jeu de Nim » (ou « jeu des allumettes ») en 1900 :
- John Horton Conway, Richard Guy et Elwyn Berlekamp popularisent le domaine à la fin des années 70,
- de nombreux ~~*joueurs*~~ **mathématiciens** ont continué...

Statut de quelques jeux

1. Othello :
   - l'ordinateur gagne depuis 1980,

Statut de quelques jeux

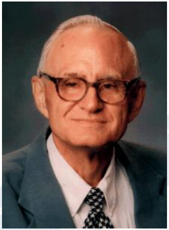
1. Othello :
   - l'ordinateur gagne depuis 1980,
2. morpion (alignement de 5 sur une grille 15×15) :
   - stratégie optimale en 1996

Statut de quelques jeux

1. Othello :
   - l'ordinateur gagne depuis 1980,
2. morpion (alignement de 5 sur une grille 15×15) :
   - stratégie optimale en 1996
3. les échecs :
   - première partie gagnée par l'ordinateur en 1996
   - premier tournoi gagné par l'ordinateur en 2006

Statut de quelques jeux

1. Othello :
   - l'ordinateur gagne depuis 1980,
2. morpion (alignement de 5 sur une grille 15 $\times$ 15) :
   - stratégie optimale en 1996
3. les échecs :
   - première partie gagnée par l'ordinateur en 1996
   - premier tournoi gagné par l'ordinateur en 2006
4. les dames anglaises :
   - l'ordinateur gagne depuis 1994
   - stratégie optimale depuis 2007



Statut de quelques jeux

1. Othello :
   - l'ordinateur gagne depuis 1980,
2. morpion (alignement de 5 sur une grille 15 × 15) :
   - stratégie optimale en 1996
3. les échecs :
   - première partie gagnée par l'ordinateur en 1996
   - premier tournoi gagné par l'ordinateur en 2006
4. les dames anglaises :
   - l'ordinateur gagne depuis 1994
   - stratégie optimale depuis 2007
5. le jeu de go : les humains sont toujours meilleurs
   - sauf sur les petits plateaux (2008),
   - la différence diminue (handicap : 6 pierres en 2009)

Plan

Les ordinateurs : une solution ?

Il y a environ

$$500\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

positions possibles pour le jeu de dames.

Les ordinateurs : une solution ?

Il y a environ

$$500\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

positions possibles pour le jeu de dames.

Les étudier toutes, même avec un ordinateur est impossible.

À raison de un million de positions par seconde,
il faudrait plus de <u>15 millions d'années</u> pour les traiter !

Les ordinateurs : une solution ?

Il y a environ

500 000 000 000 000 000 000

positions possibles pour le jeu de dames.

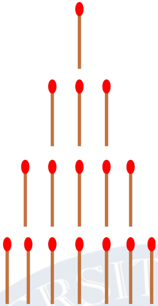
Les étudier toutes, même avec un ordinateur est impossible.

À raison de un million de positions par seconde,
il faudrait plus de <u>15 millions d'années</u> pour les traiter !

On cherche de la <u>structure</u> dans les jeux pour simplifier.

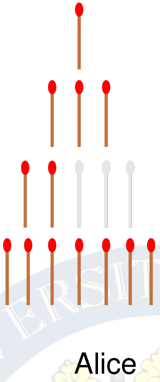
Jeu de Nim

- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour



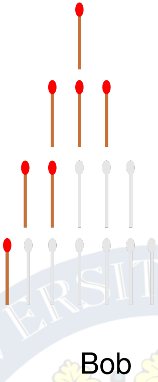
Jeu de Nim

- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne



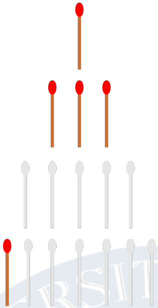
Jeu de Nim

- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne



Jeu de Nim

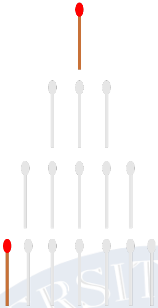
- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne



Alice

Jeu de Nim

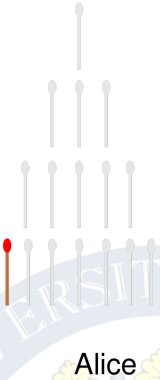
- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne



Bob

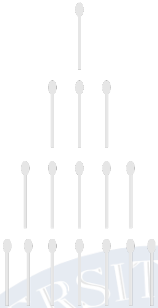
Jeu de Nim

- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne



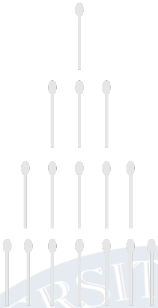
Jeu de Nim

- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne
- on a perdu quand on ne peut plus jouer



Bob

Jeu de Nim



- on commence avec plusieurs tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève des allumettes sur une ligne
- on a perdu quand on ne peut plus jouer

Bob

Question : qui, de Alice ou Bob, a une stratégie gagnante ?

Remarque

Théorème

Pour un jeu de ce style :

- *soit le premier joueur a une stratégie gagnante,*
- *soit le second joueur a une stratégie gagnante.*

Remarque

Théorème

Pour un jeu de ce style :

- *soit le premier joueur a une stratégie gagnante,*
- *soit le second joueur a une stratégie gagnante.*

La situation est un peu plus complexe dans le cas général. (possibilité d'ex-aequo...)

Le jeu de Nim – bis

Comme dans de nombreux cas :

1. il y a beaucoup de possibilités,
2. les mathématiques nous permettent de simplifier,
   (écriture en base 2)
3. l'informatique nous permet de trouver la solution.

Le jeu de Nim – bis

Comme dans de nombreux cas :

1. il y a beaucoup de possibilités,
2. les mathématiques nous permettent de simplifier,
   (écriture en base 2)
3. l'informatique nous permet de trouver la solution.

L'étape (2) est nécessaires pour pouvoir calculer la solution.

Jeu de Nim – bis – bis

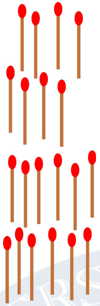
Programme pour calculer tous les coups gagnants :

```
def grundy (tas):
    g = 0
    for n in tas:
        g = g ^ n
    return g

def nim (tas):
    g = grundy(tas)
    coups = []
    for i in range(len(tas)):
        if tas[i] > tas[i] ^ g:
            coups.append((i,tas[i]-(tas[i]^g)))
    return coups

def affiche_coups(coups):
    print "Il y a %i coup(s) gagnant(s) :" % len(coups)
    for (i,n) in coups:
        print " - coup gagnant : enlever %i allumettes du tas %i" % (n,i+1)
```

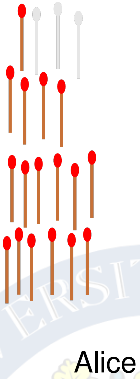
Jeu de Nim – variante



- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour

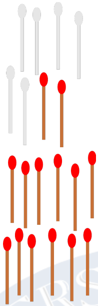
Jeu de Nim – variante

- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes



Jeu de Nim – variante

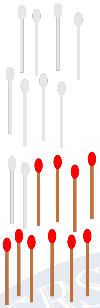
- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes



Bob

Jeu de Nim – variante

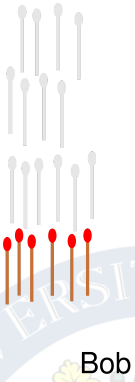
- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes



Alice

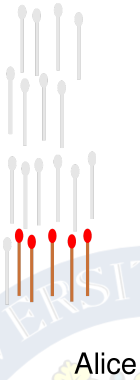
Jeu de Nim – variante

- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes

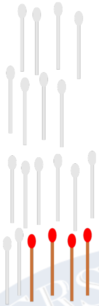


Jeu de Nim – variante

- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes



Jeu de Nim – variante

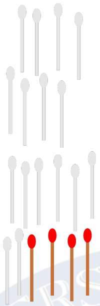


Bob

- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes
- on a perdu quand on ne peut plus jouer

Jeu de Nim – variante

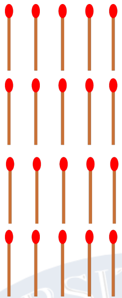
- on commence avec un tas d'allumettes
- deux joueurs jouent tour à tour
- chacun enlève 1, 2, 3 ou 4 allumettes
- on a perdu quand on ne peut plus jouer



Bob

Question : qui, de Alice ou Bob, a une stratégie gagnante ?

Jeu de Nim – variante – explication



Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

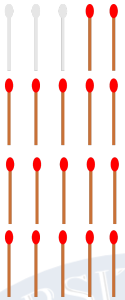
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Alice

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

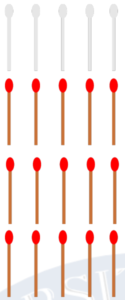
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Bob

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

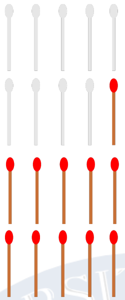
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Alice

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

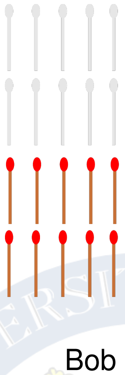
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

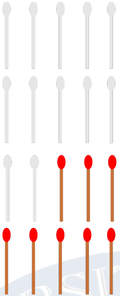
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Alice

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

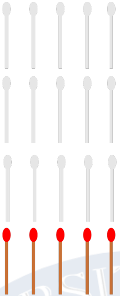
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Bob

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

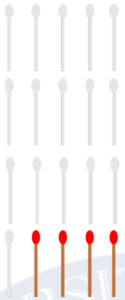
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

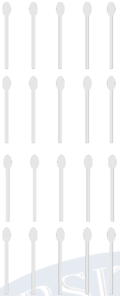
Jeu de Nim – variante – explication

Théorème

Si on commence avec 5, 10, 15, 20, ... allumettes, le second joueur a une stratégie gagnante.

Pour gagner, on applique la recette suivante :

premier	second
i	$5 - i$
1	4
2	3
3	2
4	1



Bob

Si on commence avec un autre nombre d'allumettes (14 par exemple), le premier joueur peut gagner en se ramenant à un multiple de 5 (en enlevant 4 allumettes pour arriver à 10).

Plan

« Brussel sprouts »

- on commence avec quelques croix

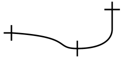
« Brussel sprouts »

- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix

Alice

« Brussel sprouts »

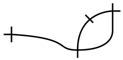
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix



Alice

« Brussel sprouts »

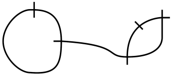
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Bob

« Brussel sprouts »

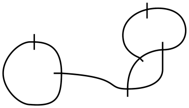
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Alice

« Brussel sprouts »

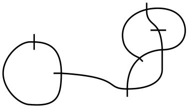
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Bob

« Brussel sprouts »

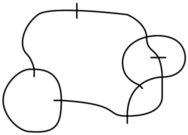
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Alice

« Brussel sprouts »

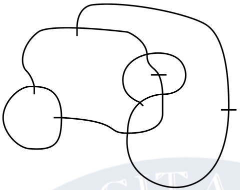
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Bob

« Brussel sprouts »

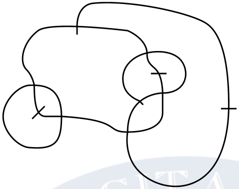
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Alice

« Brussel sprouts »

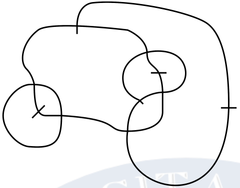
- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*



Bob

« Brussel sprouts »

- on commence avec quelques croix
- chaque joueur joint des bouts de croix
- en rajoutant deux bouts de croix
- *etc.*
- le dernier qui peut jouer gagne



<u>Bob</u> vainqueur

Euh...

- en partant avec $2, 4, 6, 8, \ldots$, c'est toujours Bob qui gagne,
- en partant avec $1, 3, 5, 7, \ldots$, c'est toujours Alice qui gagne.

Euh...

- en partant avec $2, 4, 6, 8, \ldots$, c'est toujours Bob qui gagne,
- en partant avec $1, 3, 5, 7, \ldots$, c'est toujours Alice qui gagne.

En fait, la durée d'une partie ne dépend pas des coups joués :

Théorème

Si on commence avec n croix, la partie durera exactement $5n - 2$ coups.

« sprouts »

on ne peut utiliser que 3 bras de chaque croix.

(En fait, la règle est un tout petit peu plus subtile que ça...)

« sprouts »

on ne peut utiliser que 3 bras de chaque croix.

(En fait, la règle est un tout petit peu plus subtile que ça...)

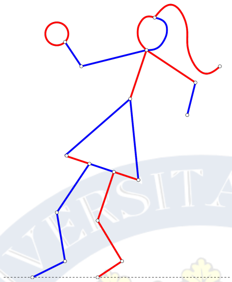
Personne ne sait qui gagne, sauf pour des tous petits nombres de croix.

Plan

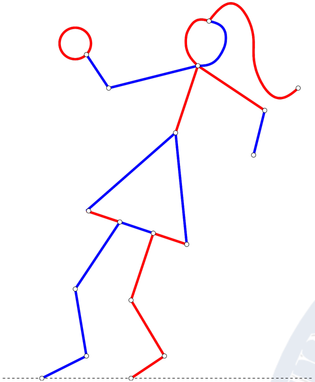
1. Quoi, comment, qui et quand ?
2. Informatique et mathématique
3. Deux variantes de « sprouts »
4. **Structure des jeux**

Le jeu de « Hackenbush »

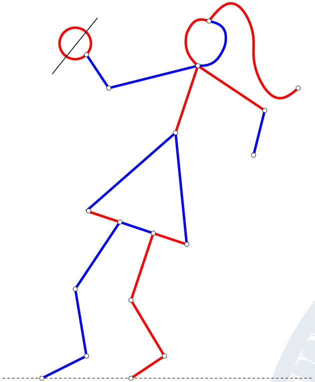
- on commence avec un « dessin » rouge et bleu
- deux joueurs jouent tour à tour
- un joueur efface des traits rouges,
- l'autre des traits bleus
- celui qui ne peut plus jouer perd



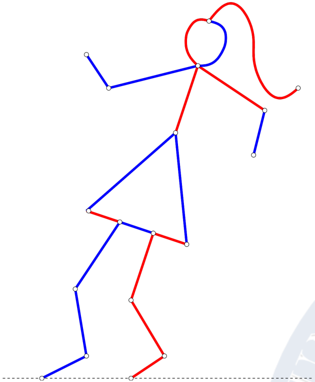
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



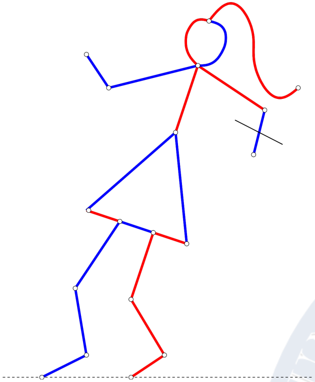
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



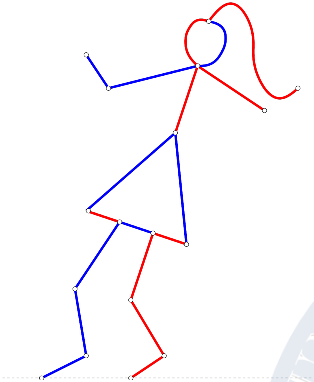
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



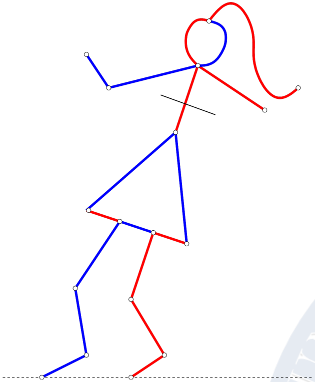
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



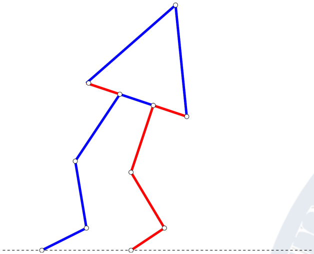
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



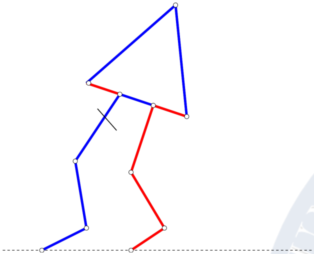
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



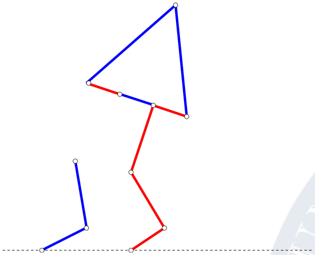
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



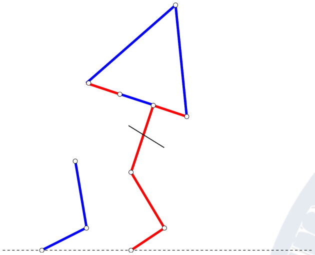
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



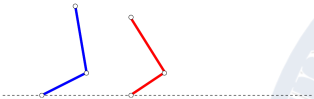
Le jeu de « Hackenbush » : exemple



Le jeu de « Hackenbush » : exemple



Le jeu de « Hackenbush » : exemple



Le jeu de « Hackenbush » : exemple

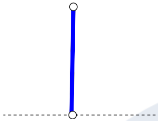
etc.

C’est le joueur rouge qui gagne cette partie...

Coup d'avance et addition

- un trait bleu vaut $+1$

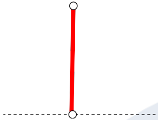
  c'est un coup pour le joueur bleu



Coup d'avance et addition

- un trait bleu vaut $+1$
- un trait rouge vaut -1

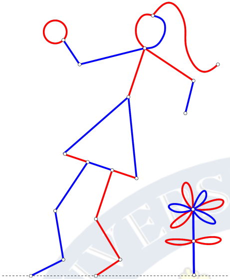
  c'est un coup pour le joueur rouge



Coup d'avance et addition

- un trait bleu vaut $+1$
- un trait rouge vaut -1
- on additionne deux dessin en les mettant cote à cote

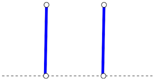
  on additionne les avantages des joueurs



Coups d'avance et addition – bis

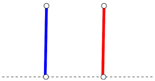
- $+1$ et $+1$ font $+2$

  le joueur bleu a 2 coups d'avance



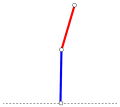
Coups d'avance et addition – bis

- $+1$ et $+1$ font $+2$
- $+1$ et -1 font ... 0
  les avantages se compensent,
  personne ne veut commencer



Coups d'avance et addition – bis

- $+1$ et $+1$ font $+2$
- $+1$ et -1 font ... 0

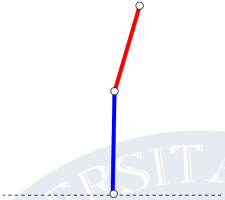


<u>Question</u> : que vaut le dessin suivant ?

Un demi coup d'avance ?

- c'est plus que 0

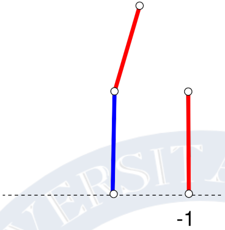
  car bleu a un avantage



Un demi coup d'avance ?

- c'est plus que 0
- c'est moins que 1

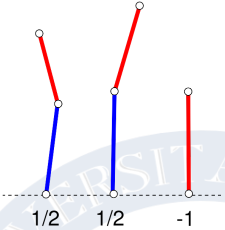
  car rouge a un avantage



Un demi coup d'avance ?

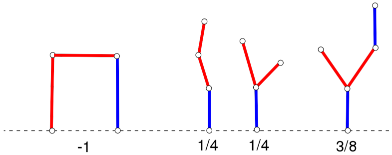
- c'est plus que 0
- c'est moins que 1
- c'est exactement $1/2$

  car ni bleu ni rouge n'a d'avantage



Des quarts et des huitièmes ?

Quelques calculs montrent que :

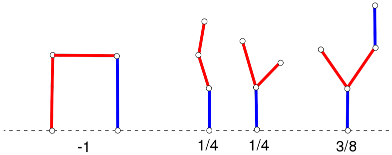


Le total $(-1 + 1/4 + 1/4 + 3/8 = -1/8)$ est négatif :

le joueur rouge a donc un avantage...

Des quarts et des huitièmes ?

Quelques calculs montrent que :



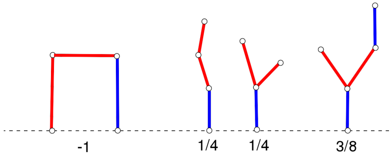
Le total $(-1 + 1/4 + 1/4 + 3/8 = -1/8)$ est négatif :

le joueur rouge a donc un avantage...

Exercice :
chercher une stratégie gagnante pour rouge quand il joue en second.

Des quarts et des huitièmes ?

Quelques calculs montrent que :



Le total $(-1 + 1/4 + 1/4 + 3/8 = -1/8)$ est négatif :

le joueur rouge a donc un avantage...

Exercice :

chercher une stratégie gagnante pour rouge quand il joue en second.

Remarque :

C'est « un peu » plus complexe si on ajoute des coups « bicolores ».

Résumé

Théorème

Les jeux peuvent être additionnés et comparés comme les nombres.

(On dit que les jeux forment un groupe abélien ordonné.)

Résumé

Théorème

Les jeux peuvent être additionnés et comparés comme les nombres.

(On dit que les jeux forment un groupe abélien ordonné.)

- si un jeu est « plus grand » que le jeux « vide », alors le joueur bleu a une stratégie gagnante. (Quand il joue en second.)
- si un jeu est « plus petit » que le jeux « vide », alors le joueur rouge a une stratégie gagnante. (Quand il joue en second.)

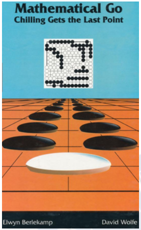
Attention

Le théorème précédent ne donne pas de méthode simple pour calculer une stratégie gagnante.

Attention

Le théorème précédent ne donne pas de méthode simple pour calculer une stratégie gagnante.

Il permet simplement de décomposer une position en morceaux plus simples.

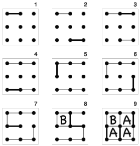


Compléments de lecture

- Jean-Paul Delahaye, Stratégies magiques au pays de Nim, Pour la Science, mars 2009, n° 307, p 88-93
  `http://www2.lifl.fr/~delahaye/`
- Jean-Paul Delahaye, La fin des Dames anglaises ?, Interstice, octobre 2009.
  `http://interstices.info`
- de nombreux articles de Martin Gardner

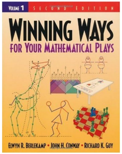
Compléments de lecture (anglais)

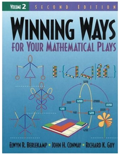
- Elwyn Berlekamp, The Dots-and-Boxes Game : Sophisticated Child’s Play, juillet 2000, AK Peters.

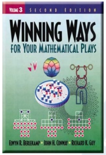


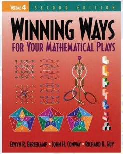
Compléments de lecture (anglais)

- Elwyn Berlekamp, The Dots-and-Boxes Game : Sophisticated Child's Play, juillet 2000, AK Peters.
- E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, Winning ways for you mathematical plays, AK Peters.









Contact

Pierre Hyvernat : `pierre.hyvernat@univ-savoie.fr`

Contact

Pierre Hyvernat : `pierre.hyvernat@univ-savoie.fr`

¿ questions / réponses ?