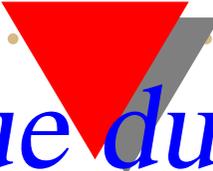




**Construire de nouveaux modèles de la  
logique linéaire**

Daniel de Carvalho (IML et PPS)

Chambéry, 2007



# Qu'est-ce qu'une sémantique du lambda-calcul ?

Une sémantique du lambda-calcul est une structure catégorique  $\mathcal{K} = (\mathbb{K}, \dots)$  telle que :

- si  $t$  est un lambda-terme de type  $A \Rightarrow B$ , alors  $\llbracket t \rrbracket$  est un morphisme de  $\llbracket A \rrbracket$  vers  $\llbracket B \rrbracket$  ;
- si  $t \rightarrow_{\beta} t'$ , alors  $\llbracket t \rrbracket = \llbracket t' \rrbracket$ .

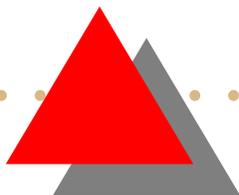




# Qu'est-ce qu'une sémantique de la logique linéaire ?

Une sémantique de la logique linéaire est une structure catégorique  $C = (\mathbb{C}, \dots)$  telle que :

- si  $\pi$  est une preuve de  $A \vdash B$ , alors  $\llbracket \pi \rrbracket$  est un morphisme de  $\llbracket A \rrbracket$  vers  $\llbracket B \rrbracket$  ;
- si  $\pi$  se réduit en  $\pi'$ , alors  $\llbracket \pi \rrbracket = \llbracket \pi' \rrbracket$  ;
- la traduction de Girard ( $A \Rightarrow B = !A \multimap B$ ) donne une sémantique du lambda-calcul.



# La réponse de BBPH

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC  $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ ,
- d'une comonade monoïdale symétrique  $((T, m, n), \delta, d)$  dans  $\mathcal{C}$  ;
- et de deux transformations naturelles monoïdales  $c$  et  $w$  telles que
  - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$  est un comonoïde commutatif dans  $(\mathbb{C}^T, \otimes^T, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
  - et tout morphisme de coalgèbres entre deux  $\mathbb{T}$ -coalgèbres libres est un morphisme de comonoïdes.

Modèle (extensionnel)  
de IMELL  
(BBPH)

Sémantique extensionnelle  
du  $\lambda$ -calcul  
(CCC)

?

Sémantique  
du  $\lambda$ -calcul  
(semi-CCC [Hayashi])

Réseaux différentiels



# *Le modèle relationnel des multi-ensembles finis*

On considère la catégorie **Rel** des ensembles et relations. C'est une SMCC (elle est même \*-autonome), donc on peut interpréter *(I)MLL*. Une interprétation bien connue du ! est

- !A est l'ensemble des multiensembles finis à support dans A ;
- si  $f \subseteq A \times B$ , alors
$$!f = \{([\alpha_1, \dots, \alpha_n], [\beta_1, \dots, \beta_n]) ; (\alpha_i, \beta_i) \in f\}.$$

! est un foncteur.





# *Le modèle relationnel des suites finies*

Une autre interprétation du ! est possible :

- !A est l'ensemble des suites finies à valeurs dans A ;
- si  $f \subseteq A \times B$ , alors  
 $!f = \{((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)})) ; n \in \mathbb{N}, (\alpha_i, \beta_i) \in f \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ .

Et pourtant, ! n'est pas un foncteur !





# *Semi-foncteurs (Hayashi)*

Un semi-foncteur, c'est comme un foncteur, sauf qu'il ne préserve pas nécessairement les identités.





# Monades (I)

$(T, \mu, \eta)$  est une monade dans une catégorie  $\mathbb{C}$  si, et seulement si,

- $T$  est un foncteur de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  ;
- $\mu$  est une transformation naturelle de  $T \circ T$  vers  $T$  ;
- et  $\eta$  est une transformation naturelle  $id_{\mathbb{C}}$  vers  $T$

tels que, pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{C}$ , les diagrammes suivants commutent dans la catégorie  $\mathbb{C}$ .



# Monades (II)

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T \circ T(X) \\ \downarrow T(\mu_X) & & \downarrow \mu_X \\ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array}$$

# Monades (III)

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T \circ T(X) & & T \circ T(X) & \xleftarrow{T(\eta_X)} & T(X) \\ & \searrow \text{id}_{T(X)} & \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_X & & \swarrow \text{id}_{T(X)} \\ & & T(X) & & T(X) & & \end{array}$$

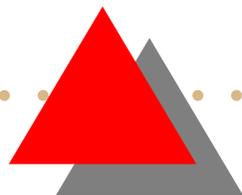


# *Semi-monades (I)*

$(T, \mu, \eta)$  est une monade dans une catégorie  $\mathbb{C}$  si, et seulement si,

- $T$  est un **semi**-foncteur de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  ;
- $\mu$  est une transformation naturelle de  $T \circ T$  vers  $T$  ;
- et  $\eta$  est une transformation naturelle  $id_{\mathbb{C}}$  vers  $T$

tels que, pour tout objet  $X$  de  $\mathbb{C}$ , les diagrammes suivants commutent dans la catégorie  $\mathbb{C}$ .



# *Semi-monades (II)*

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T \circ T(X) \\ \downarrow T(\mu_X) & & \downarrow \mu_X \\ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array}$$

# Semi-monades (III)

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T \circ T(X) & & T \circ T(X) & \xleftarrow{T(\eta_X)} & T(X) \\ & \searrow \text{id}_{T(X)} & \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_X & & \swarrow T(\text{id}_X) \\ & & T(X) & & T(X) & & \end{array}$$

# *Semi-monades (IV)*

$$\begin{array}{ccc} T \circ T(X) & \xrightarrow{T(id_{T(X)})} & T \circ T(X) \\ & \searrow \mu_X & \downarrow \mu_X \\ & & T(X) \end{array}$$

# Exemple de semi-comonade

- Le semi-foncteur est le semi-foncteur de **Rel** vers **Rel** des suites finies ;
- la comultiplication est  $\delta_A = \{((\alpha_1, \dots, \alpha_n), ((\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(p_1)}), \dots, (\alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{k-1} p_j+1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}))) ; \sigma \in \mathfrak{S}_{n, (p_1, \dots, p_k)}\} ;$
- la counité est  $\eta_A = \{((\alpha), \alpha) ; \alpha \in A\}.$

# Qu'est-ce qu'un modèle de IMELL ?

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC  $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ ,
- d'une **semi**-comonade monoïdale symétrique  $((T, m, n), \delta, d)$  dans  $\mathcal{C}$  ;
- et de deux transformations naturelles monoïdales  $c$  et  $w$  telles que
  - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$  est un comonoïde commutatif dans  $(\mathbb{C}^T, \otimes^T, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
  - et  $\delta_A$  est un morphisme de comonoïdes.



# Une interprétation du $\lambda$ -calcul

Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle de IMELL. On peut définir une catégorie  $\Lambda(\mathfrak{M})$  où

- les objets sont les suites  $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$  avec  $A_1, \dots, A_m$  des objets de  $\mathbb{C}$  ;
- une flèche de  $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$  vers  $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$  est une suite  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ , avec  $f_i \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m !A_j, B_i]$  tel que  $f_i \circ \bigotimes_{j=1}^m !id_{A_j} = f_i$  ;

**Théorème** Il existe une structure de semi-CCC sur  $\Lambda(\mathfrak{M})$ .



# Qu'est-ce qu'un modèle des DN ?

C'est la donnée pour toute formule  $A$

- d'une bigèbre  $(!A, \dots)$  dans une catégorie monoïdale enrichie dans la catégorie des monoïdes commutatifs
- + d'un morphisme de  $!A$  vers  $A$
- + d'un morphisme de  $A$  vers  $!A$

tels que quelques diagrammes commutent.



## *Des DN à IMELL*

**Théorème** A partir d'un modèle cocommutatif des réseaux différentiels enrichi sur une catégorie monoïdale des semi-modules dénombrablement complets (Krob), la formule de Taylor-Ehrhard fournit une sémantique de IMELL.

**Remarque** Si le modèle des réseaux différentiels n'est pas commutatif, on n'obtient pas un modèle *extensionnel* de IMELL.