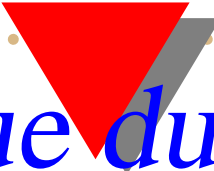




**Construire de nouveaux modèles de la
logique linéaire**

Daniel de Carvalho (IML et PPS)

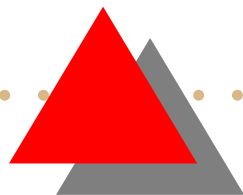
Chambéry, 2007



Qu'est-ce qu'une sémantique du lambda-calcul ?

Une sémantique du lambda-calcul est une structure catégorique $\mathcal{K} = (\mathbb{K}, \dots)$ telle que :

- si t est un lambda-terme de type $A \Rightarrow B$, alors $\llbracket t \rrbracket$ est un morphisme de $\llbracket A \rrbracket$ vers $\llbracket B \rrbracket$;
- si $t \rightarrow_{\beta} t'$, alors $\llbracket t \rrbracket = \llbracket t' \rrbracket$.

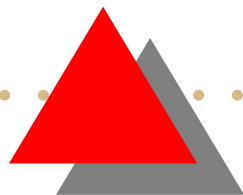




Qu'est-ce qu'une sémantique de la logique linéaire ?

Une sémantique de la logique linéaire est une structure catégorique $C = (\mathbb{C}, \dots)$ telle que :

- si π est une preuve de $A \vdash B$, alors $[[\pi]]$ est un morphisme de $[[A]]$ vers $[[B]]$;
- si π se réduit en π' , alors $[[\pi]] = [[\pi']]$;
- la traduction de Girard ($A \Rightarrow B = !A \multimap B$) donne une sémantique du lambda-calcul.



La réponse de BBPH

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$,
- d'une comonade monoïdale symétrique $((T, m, n), \delta, d)$ dans \mathcal{C} ;
- et de deux transformations naturelles monoïdales c et w telles que
 - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ est un comonoïde commutatif dans $(\mathbb{C}^T, \otimes^T, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
 - et tout morphisme de coalgèbres entre deux \mathbb{T} -coalgèbres libres est un morphisme de comonoïdes.

Modèle (extensionnel)
de IMELL
(BBPH)

Sémantique extensionnelle
du λ -calcul
(CCC)

?

Sémantique
du λ -calcul
(semi-CCC [Hayashi])

Réseaux différentiels



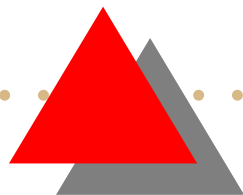
Le modèle relationnel des multi-ensembles finis

On considère la catégorie **Rel** des ensembles et relations. C'est une SMCC (elle est même *-autonome), donc on peut interpréter *(I)MLL*.

Une interprétation bien connue du ! est

- !A est l'ensemble des multiensembles finis à support dans A ;
- si $f \subseteq A \times B$, alors
$$!f = \{([\alpha_1, \dots, \alpha_n], [\beta_1, \dots, \beta_n]) ; (\alpha_i, \beta_i) \in f\}.$$

! est un foncteur.



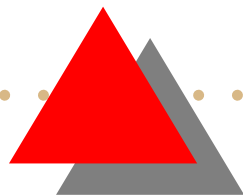


Le modèle relationnel des suites finies

Une autre interprétation du ! est possible :

- !A est l'ensemble des suites finies à valeurs dans A ;
- si $f \subseteq A \times B$, alors
 $!f = \{((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)})) ; n \in \mathbb{N}, (\alpha_i, \beta_i) \in f \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

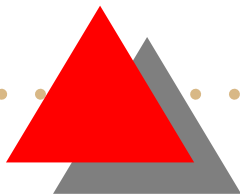
Et pourtant, ! n'est pas un foncteur !





Semi-foncteurs (Hayashi)

Un semi-foncteur, c'est comme un foncteur, sauf qu'il ne préserve pas nécessairement les identités.



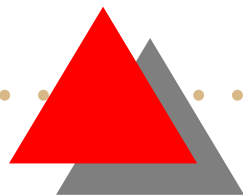


Monades (I)

(T, μ, η) est une monade dans une catégorie \mathbb{C} si, et seulement si,

- T est un foncteur de \mathbb{C} vers \mathbb{C} ;
- μ est une transformation naturelle de $T \circ T$ vers T ;
- et η est une transformation naturelle $id_{\mathbb{C}}$ vers T

tels que, pour tout objet X de \mathbb{C} , les diagrammes suivants commutent dans la catégorie \mathbb{C} .



Monades (II)

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T \circ T(X) \\ \downarrow T(\mu_X) & & \downarrow \mu_X \\ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array}$$

Monades (III)

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T \circ T(X) & & T \circ T(X) & \xleftarrow{T(\eta_X)} & T(X) \\ & \searrow \text{id}_{T(X)} & \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_X & & \swarrow \text{id}_{T(X)} \\ & & T(X) & & T(X) & & \end{array}$$



Semi-monades (I)

(T, μ, η) est une monade dans une catégorie \mathbb{C} si, et seulement si,

- T est un **semi**-foncteur de \mathbb{C} vers \mathbb{C} ;
- μ est une transformation naturelle de $T \circ T$ vers T ;
- et η est une transformation naturelle $id_{\mathbb{C}}$ vers T

tels que, pour tout objet X de \mathbb{C} , les diagrammes suivants commutent dans la catégorie \mathbb{C} .



Semi-monades (II)

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T \circ T(X) \\ \downarrow T(\mu_X) & & \downarrow \mu_X \\ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array}$$

Semi-monades (III)

$$\begin{array}{ccccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T \circ T(X) & & T \circ T(X) & \xleftarrow{T(\eta_X)} & T(X) \\ & \searrow \text{id}_{T(X)} & \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_X & & \swarrow T(\text{id}_X) \\ & & T(X) & & T(X) & & \end{array}$$

Semi-monades (IV)

$$\begin{array}{ccc} T \circ T(X) & \xrightarrow{T(id_{T(X)})} & T \circ T(X) \\ & \searrow \mu_X & \downarrow \mu_X \\ & & T(X) \end{array}$$

Exemple de semi-comonade

- Le semi-foncteur est le semi-foncteur de **Rel** vers **Rel** des suites finies ;
- la comultiplication est $\delta_A = \{((\alpha_1, \dots, \alpha_n), ((\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(p_1)}), \dots, (\alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{k-1} p_j+1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}))) ; \sigma \in \mathfrak{S}_{n, (p_1, \dots, p_k)}\} ;$
- la counité est $\eta_A = \{((\alpha), \alpha) ; \alpha \in A\}.$

Qu'est-ce qu'un modèle de IMELL ?

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$,
- d'une **semi**-comonade monoïdale symétrique $((T, m, n), \delta, d)$ dans \mathcal{C} ;
- et de deux transformations naturelles monoïdales c et w telles que
 - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ est un comonoïde commutatif dans $(\mathbb{C}^T, \otimes^T, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
 - et δ_A est un morphisme de comonoïdes.

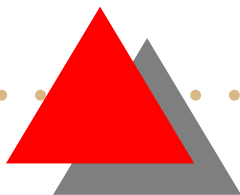


Une interprétation du λ -calcul

Soit \mathfrak{M} un modèle de IMELL. On peut définir une catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ où

- les objets sont les suites $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ avec A_1, \dots, A_m des objets de \mathbb{C} ;
- une flèche de $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ vers $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$ est une suite $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$, avec $f_i \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m !A_j, B_i]$ tel que $f_i \circ \bigotimes_{j=1}^m !id_{A_j} = f_i$;

Théorème Il existe une structure de semi-CCC sur $\Lambda(\mathfrak{M})$.



Qu'est-ce qu'un modèle des DN ?

C'est la donnée pour toute formule A

- d'une bigèbre $(!A, \dots)$ dans une catégorie monoïdale enrichie dans la catégorie des monoïdes commutatifs
- + d'un morphisme de $!A$ vers A
- + d'un morphisme de A vers $!A$

tels que quelques diagrammes commutent.



Des DN à IMELL

Théorème A partir d'un modèle cocommutatif des réseaux différentiels enrichi sur une catégorie monoïdale des semi-modules dénombrablement complets (Krob), la formule de Taylor-Ehrhard fournit une sémantique de IMELL.

Remarque Si le modèle des réseaux différentiels n'est pas commutatif, on n'obtient pas un modèle *extensionnel* de IMELL.