Construire de nouveaux modèles de la logique linéaire

Daniel de Carvalho (IML et PPS)

Chambéry, 2007

Qu'est-ce qu'une sémantique du lambda-calcul ?

Une sémantique du lambda-calcul est une structure catégorique $\mathcal{K} = (\mathbb{K}, \ldots)$ telle que :

- si t est un lambda-terme de type $A \Rightarrow B$, alors $[\![t]\!]$ est un morphisme de $[\![A]\!]$ vers $[\![B]\!]$;
- si $t \to_\beta t'$, alors $[\![t]\!] = [\![t']\!]$.

Qu'est-ce qu'une sémantique de la logique linéaire ?

Une sémantique de la logique linéaire est une structure catégorique $C = (\mathbb{C}, \ldots)$ telle que :

- si π est une preuve de $A \vdash B$, alors $[\![\pi]\!]$ est un morphisme de $[\![A]\!]$ vers $[\![B]\!]$;
- si π se réduit en π', alors $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$;
- la traduction de Girard ($A \Rightarrow B = !A \multimap B$) donne une sémantique du lambda-calcul.

La réponse de BBPH

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$,
- d'une comonade monoïdale symmétrique $((T, \mathrm{m}, \mathrm{n}), \delta, d)$ dans $\mathcal{C}$;
- et de deux transformations naturelles monoïdales c et w telles que
  - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ est un comonoïde commutatif dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, \mathrm{n}), \alpha, \lambda, \rho)$
  - et tout morphisme de coalgèbres entre deux $\mathbb{T}$-coalgèbres libres est un morphisme de comonoïdes.

Modèle (extensionnel) de IMELL (BBPH)	$\rightsquigarrow$	Sémantique extensionnelle du λ-calcul (CCC)
?	$\rightsquigarrow$	Sémantique du λ-calcul (semi-CCC [Hayashi])

$\uparrow$

Réseaux différentiels

Le modèle relationnel des multi-ensembles finis

On considère la catégorie **Rel** des ensembles et relations. C'est une SMCC (elle est même $*$-autonome), donc on peut interpréter $(I)MLL$. Une interprétation bien connue du ! est

- $!A$ est l'ensemble des multiensembles finis à support dans A ;
- si $f \subseteq A \times B$, alors $!f = \{([\alpha_1, \ldots, \alpha_n], [\beta_1, \ldots, \beta_n])\ ;\ (\alpha_i, \beta_i) \in f\}$.

! est un foncteur.

Le modèle relationnel des suites finies

Une autre interprétation du ! est possible :

- $!A$ est l'ensemble des suites finies à valeurs dans A ;
- si $f \subseteq A \times B$, alors $!f = \{((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)}))\ ;\ n \in \mathbb{N}, (\alpha_i, \beta_i) \in f$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

Et pourtant, ! n'est pas un foncteur !

Semi-foncteurs (Hayashi)

Un semi-foncteur, c'est comme un foncteur, sauf qu'il ne préserve pas nécessairement les identités.

Monades (I)

(T, μ, η) est une monade dans une catégorie $\mathbb{C}$ si, et seulement si,

- T est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$;
- μ est une transformation naturelle de $T \circ T$ vers T ;
- et η est une transformation naturelle $id_{\mathbb{C}}$ vers T

tels que, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, les diagrammes suivants commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Monades (II)

$$\begin{tikzcd}
T \circ T \circ T(X) \arrow[r, "\mu_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\mu_X)"'] & T \circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T \circ T(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

Monades (III)

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(X)}"'] & T \circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
 & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"'] & T(X) \arrow[l, "T(\eta_X)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\
T(X) &
\end{tikzcd}
$$

Semi-monades (I)

(T, μ, η) est une monade dans une catégorie $\mathbb{C}$ si, et seulement si,

- T est un semi-foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$;
- μ est une transformation naturelle de $T \circ T$ vers T ;
- et η est une transformation naturelle $id_{\mathbb{C}}$ vers T

tels que, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, les diagrammes suivants commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Semi-monades (II)

$$
\begin{array}{ccc}
T \circ T \circ T(X) & \xrightarrow{\mu_{T(X)}} & T \circ T(X) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle T(\mu_X)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mu_X} \\
T \circ T(X) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X)
\end{array}
$$

Semi-monades (III)

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[dr, "id_{T(X)}"'] & T\circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"] & T\circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"'] & T(X) \arrow[l, "T(\eta_X)"'] \arrow[dl, "T(id_X)"] \\
& T(X) & T(X) &
\end{tikzcd}$$

Semi-monades (IV)

$$\begin{tikzcd}
T \circ T(X) \arrow[r, "T(id_{T(X)})"] \arrow[dr, "\mu_X"'] & T \circ T(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\
 & T(X)
\end{tikzcd}$$

Exemple de semi-comonade

- Le semi-foncteur est le semi-foncteur de **Rel** vers **Rel** des suites finies ;
- la comultiplication est
  $\delta_A = \{((\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$
  $((\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p_1)}), \ldots, (\alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{k-1} p_j + 1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}))) \;;$
  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n,(p_1,\ldots,p_k)}\} \;\; ;$
- la counité est $\eta_A = \{(((\alpha), \alpha) \; ; \; \alpha \in A\}$.

Qu'est-ce qu'un modèle de IMELL ?

Un modèle de IMELL est la donnée

- d'une SMCC $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$,
- d'une semi-comonade monoïdale symétrique $((T, \mathrm{m}, \mathrm{n}), \delta, d)$ dans $\mathcal{C}$;
- et de deux transformations naturelles monoïdales c et w telles que
  - $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ est un comonoïde commutatif dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, \mathrm{n}), \alpha, \lambda, \rho)$
  - et δ_A est un morphisme de comonoïdes.

Une interprétation du λ-calcul

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de IMELL. On peut définir une catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ où

- les objets sont les suites $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ avec A_1, ..., A_m des objets de $\mathbb{C}$;
- une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ est une suite $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, avec $f_i \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^{m} !A_j, B_i]$ tel que $f_i \circ \bigotimes_{j=1}^{m} !id_{A_j} = f_i$;

Théorème Il existe une structure de semi-CCC sur $\Lambda(\mathfrak{M})$.

Qu'est-ce qu'un modèle des DN ?

C'est la donnée pour toute formule A

- d'une bigèbre $(!A, \ldots)$ dans une catégorie monoïdale enrichie dans la catégorie des monoïdes commutatifs
- + d'un morphisme de $!A$ vers A
- + d'un morphisme de A vers $!A$

tels que quelques diagrammes commutent.

Des DN à IMELL

Théorème A partir d’un modèle cocommutatif des réseaux différentiels enrichi sur une catégorie monoïdale des semi-modules dénombrablement complets (Krob), la formule de Taylor-Ehrhard fournit une sémantique de IMELL.

Remarque Si le modèle des réseaux différentiels n’est pas commutatif, on n’obtient pas un modèle *extensionnel* de IMELL.